3fn Math. P. 489 k Rummer

Deahna:

Die Buchstabenrechnung und Lehre von den Gleichungen.

Mit einer

Sammlung von Aufgaben

R2

von

F. Nummer,

Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule und Hauptlehrer der Gewerbschule zu Heidelberg.

Die Buchstabenrechnung bis zur Lehre von den niederen Reihen (einschließlich) und die Gleichungen vom ersten und zweiten Grade enthaltend.

Heidelberg.

Druck und Verlag von Julius Groos.

1847.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Das gegenwärtige Lehrbuch enthält die Hauptsätze der Buchstabenrechnung und die verschiedenen Auflösungsarten der Gleichungen des ersten und zweiten Grades.

Bei jeder Rechnungsart wurde das Verfahren an einer hinreichenden Anzahl von Beispielen gezeigt; wodurch der Schüler in den Stand gesetzt werden soll (auch ohne Beihülfe eines Lehrers) die nachfolgenden, nur mit Resultaten versehenen Aufgaben zu lösen, um Übung in der Auffassung und Behandlung algebraischer Rechnungen zu erlangen.

Die Aufgaben sind fast sämmtlich neu, wenigstens was die Zahlenwerthe betrifft; auch sind einige über die Anwendung der allgemeinen Arithmetik auf Geometrie und Naturlehre unter denselben. Die zur Lösung nöthigen Sätze sind kurz angeführt, und bei den geometrischen Aufgaben habe ich auf mein Lehrbuch der Geometrie (Heidelberg, bei J. C. B. Mohr 1841) verwiesen.

Für die schwierigeren Aufgaben sind im Anhange einzelne Andeutungen und Zwischenresultate, für die übrigen aber — nur die Resultate, gegeben. Auch wurde bei vielen Aufgaben, welche man gewöhnlich durch Gleichungen löst, die Auflösung ohne Anwendung der Gleichungen gezeigt.

Bei der Behandlung derjenigen Abschnitte, in welchen Formeln benutzt werden, z. B. in der Lehre von den Reihen und deren Anwendung auf Zinseszins — und andern hierher gehörigen Rechnungen, ging ich von dem Grundsatze aus, dem Schüler nur die nöthigen Formeln, welche er behalten muß, zu geben, und ihn in der allseitigen Benutzung dieser Formeln durch die Lösung zahlreicher Aufgaben zu üben.

Durch die Beisetzung der Aufgaben unterscheidet sich das Buch von anderen Werken über die allgemeine Arithmetik; es soll zugleich als Aufgabensammlung dienen.

Die meisten mir bekannten Lehrbücher enthalten nur wenige vollständig aufgelöste Beispiele, und entweder gar keine Aufgaben zur Selbstübung, indem sie auf besondere Aufgabensammlungen verweisen —; oder es sind Aufgaben ohne Resultate oder Andeutungen zur Auflösung gegeben. Die Schüler haben dann außer dem Lehrbuche gewöhnlich noch ein besonderes Aufgabenbuch nöthig; oder der Lehrer benutzt nur dieses, und muß dann die Sätze u. s. w. dictiren, wodurch viele Zeit verloren geht.

Auch sind die meisten Aufgabensammlungen nur mit Resultaten versehen, wie z. B. die von Meier Hirsch, die schwierigeren Aufgaben bedürfen jedoch einiger Andeutungen; die Folge hiervon war: daß ein besonderes Werk von Sachs erschien, welches aber die vollständigen Auflösungen enthält, und von dem die Schüler großentheils den Gebrauch machen, daß sie die Auflösungen geradezu abschreiben, ohne ihre eigenen Kräfte zu prüfen.

Der zweite Theil des Lehrbuches, welcher die Combinationslehre mit ihren Anwendungen, die Kettenbrüche, die Reihen höheren Ranges, und die höheren Gleichungen enthalten wird; erscheint in einigen Monaten.

Möge der Zweck, den ich bei der Abfassung des Buches im Auge hatte, erfüllt, und durch dasselbe eine Erleichterung im Unterrichte der Arithmetik erzielt werden.

Heidelberg im December 1846.

Rummer.

Inhalt.

Buchstabenrechnung.

Seite

Einleitung 1
Allgemeine Begriffe, Eintheilung der Arithmetik. Von den Zeichen, Allgemeinheit der Resultate der Buchstabenrechnung.

Erster Abschnitt. Buchstabenrechnung im Allgemeinen. . . . 3
Addition, Subtraction, Multiplication, Division. Rechnung mit Brüchen. Vom gemeinschaftlichen Maaß. Von den entgegengesetzten Größen und der Rechnung mit denselben. Aufgaben.

Zweiter Abschnitt. Rechnung mit Potenzen. 25
Erklärungen. Addition und Subtraction, Multiplication und Division. Potenzerhebung. Zerlegung in Faktoren und deren Anwendung. Aufgaben.

Dritter Abschnitt. Ausziehung der Wurzeln. 38
Erklärungen. Quadratwurzel aus Zahlen und aus Buchstabenausdrücken. Cubikwurzel. Wurzelausziehung im Allgemeinen. Erklärungen über unmögliche Größen und Bruchpotenzen. Aufgaben.

Vierter Abschnitt. Rechnung mit Wurzelgrößen. 55
Addition und Subtraction. Veränderungen und Abkürzungen. Multiplication, Division, Rationalmachen des Nenners eines Bruchs. Aufgaben.

Fünfter Abschnitt. Proportionenlehre. 64
Von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt. Von den arithmetischen Proportionen. Von den geometrischen Proportionen. Anwendungen und Aufgaben.

Sechster Abschnitt. Logarithmen. 74
Erklärungen. Berechnung der Logarithmen. Allgemeine Sätze. Von den Logarithmensystemen. Das Briggische System. Besondere Fälle bei der Rechnung mit Logarithmen. Anwendungen. Aufgaben.

Siebenter Abschnitt. Lehre von den Reihen. 90
Von den Reihen im Allgemeinen. Arithmetische Reihen erster Ordnung. Aufgaben. Geometrische Reihen. Aufgaben.

Anwendung der geometrischen Reihen auf die Zinseszins- und Rentenrechnung. Aufgaben. 107

Seite

Von den Gleichungen des ersten und zweiten Grades.

A. Einleitung. 123
Benennung der Gleichungen, Umformung derselben.

B. Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe. 126
Allgemeine Auflösung, Aufgaben, Gleichungen mit Wurzelgrößen. Anwendung zur Lösung von Aufgaben mit Text.

C. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten. 143
Gleichungen mit 2 Unbekannten, Auflösungsarten. Aufgaben. Gleichungen mit mehr als 2 Unbekannten. Aufgaben ohne Text und Aufgaben mit Text.

D. Gleichungen vom zweiten Grade. 168
Reine quadratische Gleichungen. Aufgaben. Gemischte quadratische Gleichungen. Anwendungen und Aufgaben. Gleichungen vom 2ten Grade mit mehreren Unbekannten. Aufgaben.

E. Unbestimmte Gleichungen. 190
Allgemeine Bemerkungen. Gleichung vom ersten Grade mit zwei Unbekannten. Unbestimmte Gleichungen vom ersten Grade mit mehr als zwei Unbekannten. Aufgaben. Behandlung einiger unbestimmten Gleichungen vom zweiten Grade. Aufgaben.

Resultate und Andeutungen zu den im Buche enthaltenen Aufgaben.

I. Zur Buchstabenrechnung im Allgemeinen. 209
II. „ Potenzenrechnung. 212
III. „ Wurzelausziehung. 215
IV. „ Rechnung mit Wurzelgrößen. 218
V. „ Proportionenlehre. 222
VI. „ Lehre von den Logarithmen. 223
VII. „ „ „ „ Reihen. 227
B. Zu den Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten. . 238
C. „ „ „ „ „ „ „ mehreren „ . 245
D. „ „ „ „ zweiten „ 253
E. „ „ unbestimmten Gleichungen. 265
Verbesserungen, welche vor dem Gebrauche vorzunehmen sind. . . . 272

Buchstabenrechnung.

Einleitung.

---

§. 1. Allgemeine Begriffe.

Zwei Dinge können in zweierlei Beziehungen übereinstimmen oder verschieden sein; nämlich in Bezug auf ihren Inhalt (ihre Größe), oder in Rücksicht auf den Stoff, aus welchem sie bestehen.

Die erste Beziehung führt auf den Begriff der Größe (oder Quantität), die 2te auf den der Art (oder Qualität).

Die Wissenschaft, welche von der Betrachtung der Größe der Dinge, oder von den sogenannten Größen, handelt, heißt Mathematik oder Größenlehre.

Man kann nun eine Größe entweder blos als eine Menge von gleichartigen Theilen betrachten, oder man sieht auf die Verbindung der Theile untereinander; im ersten Falle nennt man die Größe eine unstetige (discrete), im 2ten Falle ist die Größe eine stetige oder continuirliche.

Die Zahlen, oder die für dieselben genommenen allgemeinen Zeichen, die Buchstaben, sind unstetige; die Linien, Flächen und Körper aber stetige Größen.

Die Mathematik zerfällt hiernach, je nachdem sie die Größen in der einen oder andern Beziehung untersucht, in 2 Theile, nämlich: in die Arithmetik (Lehre von den nicht stetigen) und in die Geometrie (oder Lehre von den stetigen Größen).

§. 2. Eintheilung der Arithmetik.

Die Arithmetik zerfällt in die gemeine und allgemeine.

Die gemeine Arithmetik (oder Rechenkunst) beschäftigt sich mit den Zahlen und heißt deshalb auch Zahlenlehre.

Die allgemeine Arithmetik lehrt die Rechnung mit allgemeinen Größenzeichen, oder mit Buchstaben, und heißt deshalb auch Buchstabenrechnung.

Die Algebra ist derjenige Theil der allgemeinen Arithmetik, der sich mit der Aufsuchung unbekannter Größen aus bekannten mit Hülfe der sogenannten Gleichungen beschäftigt.

Derjenige Theil der Buchstabenrechnung, in welchem die Berechnungen nicht mehr durch die gewöhnlichen 4 arithmetischen Operationen ausgeführt werden können, heißt auch Analysis; und diese wird wieder in eine niedere und höhere, oder in die Analysis endlicher und unendlicher Größen eingetheilt.

§. 3. Von den Zeichen.

Die in der Mathematik und hier zunächst in der Buchstabenrechnung gebräuchlichen Zeichen sind folgende: Das Zeichen der Addition ist + (plus, mehr), das der Subtraction — (minus, weniger), das der Multiplication × oder . (mal); für die Division : oder ein Bruchstrich.

Zur Bezeichnung der Gleichheit zweier Größen gebraucht man das Zeichen = (gleich, aequal), und um auszudrücken, daß eine Größe a größer als eine andere Größe b ist, setzt man $a > b$, oder auch $b < a$, (b kleiner als a).

§. 4. Allgemeinheit der Resultate der Buchstabenrechnung.

In der Zahlenrechnung gelten die Resultate nur für einen speciellen Fall; nämlich sie sind nur so lange richtig, als die in der Angabe enthaltenen Zahlen dieselben bleiben.

Die Resultate der allgemeinen Arithmetik gelten aber für alle möglichen gleichartigen Fälle, d. h. für alle solche, bei denen die in Verbindung kommenden Größen in gleicher Beziehung zu einander stehen. Man nennt diese Resultate Formeln.

Wenn z. B. die Frage gestellt wird:

Wie viel Zins geben 8560 fl. Capital, welche zu 4 Procent ausgeliehen werden, in 3 Jahren; so erhält man als Antwort: 1027 fl. 12 kr.

Diese Antwort gilt nur für den einzelnen Fall; denn wenn das Capital, oder die Procente, oder die Zahl der Jahre geändert werden, so ist eine neue Rechnung nöthig, um das Resultat für den neuen Fall zu finden.

Nimmt man aber statt der Ziffern allgemeine Größen oder Buchstaben, z. B. k fl. Capital stehen n Jahre lang zu p Procent, wie groß ist der Zins z, so folgt:

Cap.	Jahr		Zins
100	in 1	geben	p
k	„ n	„	z
100	„ 1	„	$\frac{p.k.n}{100}$, also $z = \frac{p.k.n}{100}$
1	n		
k.			

Diese Formel für den Zins z enthält die Antworten für alle Zinsaufgaben, man darf nur für k, p und n die gegebenen Werthe setzen, so ist auch der Zins z gefunden.

Z. B. für das vorhergehende Zahlenbeispiel ist:

$$k = 8560,\ p = 4 \text{ und } n = 3, \text{ daher } z = \frac{4 . 8560 . 3}{100} = 1027 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

Die Formel gilt aber nicht nur für den Fall, in welchem der Zins gesucht wird, sondern es können auch einzeln das Capital, oder die Procente, oder die Zahl der Jahre unbekannt sein, wenn der Zins gegeben ist, die Formel gilt für alle Fälle; man setze die drei gegebenen Größen in dieselbe, so kann die vierte (gesuchte) gefunden werden.

Erster Abschnitt.

Buchstabenrechnung im Allgemeinen.

§. 1. Addition.

Zwei Zahlen a und b werden dadurch zusammengezählt, daß man ihre Einheiten zu einer neuen Zahl s vereinigt; diese hat also so viele Einheiten als a und b zusammengenommen. Man nennt a und b die Posten, Summanden oder auch Aggreganten; s aber die Summe oder das Aggregat.

Die allgemeine Bezeichnung ist: $s = a + b$, oder für mehr als 2 Posten, $s = a + b + c + d + \ldots.$ Wenn in einer Reihe von Summanden die Summe von einigen derselben, als für sich betrachtet, angedeutet werden soll; so schreibt man diese einzelnen Größen in einer Klammer. Z. B. $7 + (9 + 2)$, $(3 + 5) + (7 + 8)$, oder $a + (b + c)$. Wenn eine Größe mehrmal zu sich selbst gezählt wird, so schreibt man die Anzahl der einzelnen Posten als Coefficient vor die Größe; z. B.

$$a + a = 2a,\quad 5 + 5 + 5 = 3.5,\quad b + b + b + b = 4b.$$

Besteht eine Reihe von Summanden aus verschiedenen Vielfachen derselben Einheit, so bildet man die Summe durch Zusammenzählen aller Coefficienten. Z. B.

$$4.3 + 2.3 + 5.3 = 11.3 = 33, \text{ denn:}$$
$$12 + 6 + 15 = 33.$$
$$7a + 8a + 3a + a = 19a, \text{ denn}$$

zerlegt man alle Posten in die einzelnen Einheiten, wovon jede $= a$ ist, so erhält man die Summe von 19 Einheiten, jede $= a$, also $19a$.

Sind aber die Einheiten verschieden, so ist im Allgemeinen eine Vereinigung nicht möglich, man setzt dann die Größen durch Verbindung mittelst des Zeichens + nebeneinander. Z. B.

$$3.5 + 7.2 + 8.9$$
$$7a + 2b + 3c$$

Die erste Aufgabe kann erst dann vereinfacht werden, wenn man zuerst die Produkte bildet, also $15 + 14 + 72 = 101$.

$$11a + 4a + 6b + 3a + 2b + 3c =$$
$$= (11a + 4a + 3a) + (6b + 2b) + 3c = 18a + 8b + 3c.$$

Man kann bei Beispielen wie das vorhergehende auch die gleichnamigen Größen unter einander setzen und dann addiren, also:

$$\begin{array}{l} 11a + 6b + 3c \\ 4a + 2b \\ 3a \\ \hline 18a + 8b + 3c \end{array}$$

Setzt man z. B. in der vorhergehenden Aufgabe $a = 2$, $b = 1$ und $c = 5$ und vergleicht die Posten mit der Summe, so folgt:

$$\begin{array}{r} 11 . 2 + 6 . 1 + 3 . 5 = 43 \\ 4 . 2 + 2 . 1 = 10 \\ 3 . 2 = \ \ 6 \\ \hline \text{Summe} = 59 \end{array}$$

Nun ist aber auch $18 . 2 + 8 . 1 + 3 . 5 = 59$.
Setzet ferner $a = 5$, $b = 7$, $c = 0$!

$$\begin{array}{l} 2a + 7b + 5c + 3x + 4y + 3z \\ 5a + 9b + 2c + x + 3y \\ a + 2b \quad\quad + 5x + 11y \\ \hline 8a + 18b + 7c + 9x + 18y + 3z \end{array}$$

§. 2. Aufgaben über die Addition.

1) Schreibet alle gleichbedeutenden Summenformen von:
$3 + 2 + 7$ auf!

2) Wie heißen alle gleichbedeutenden Summenformen von:
$a + b + c$?

3) Summiret folgende Posten:
1) $5a + a$, 2) $7b + 8b$, 3) $5b + 3b + 9b$

4) Bildet die Summe von:
$6a + 3b + 2a + 5b + 9b + 2a + b$!

5) Addiret die Größen: $(9a + 2a) + 7b + (4b + 2b)$!

6) Addiret $\left\{\begin{array}{l} 2a + 3b + 8c + d \\ 5a + b + 9c \end{array}\right.$

7) " $\left\{\begin{array}{l} 3a + c + x + 2y + 4z \\ 5a + d + 3x + z \end{array}\right.$

8) " $\left\{\begin{array}{l} 2a + 3m + 5n + 3p \\ 9a + 3n + p \\ 4a + 2m + n + 3p \end{array}\right.$

Nehmet für die Buchstaben in 6, 7 und 8 beliebige Zahlen!

§. 3. Subtraction.

Man soll eine Größe r finden, welche mit einer andern Größe b zusammengezählt eine gegebene Summe a bilden soll.

Die Bezeichnung ist: $r = a - b$,

r heißt Rest, Unterschied oder Differenz, a der Minuend (das was verkleinert werden soll) und b der Subtrahend (das Abzuziehende).

Es ist klar, daß man auch den Rest und Subtrahend verwechseln kann, denn beide ergänzen einander zu a, $b = a - r$; dieses Verfahren kann man zur Prüfung des Restes anwenden.

Eine andere Probe der Subtraction ist die, daß Rest und Subtrahend zusammen den Minuend geben müssen.

Wenn eine Größe von sich selbst abgezogen wird, so ist der Rest = Null; $a - a = 0$, denn $a + 0 = a$.

Bei gleichen Einheiten zieht man den Coefficienten des Subtrah. von dem des Minuend. ab.

$$13 - 8 = 5,\ 17a - 9a = 8a,\ \text{denn}\ 9a + 8a = 17a.$$

Ungleiche Größen werden mit dem Verbindungszeichen — zusammengestellt, z. B.

$$(4a + 3a) - 2b = 7a - 2b.$$

Bei der Subtraction mehrerer Größen von einem Aggregate, schreibt man die gleichnamigen untereinander, z. B.

$$(7a + 8b) - (5a + 2b) = \begin{array}{r} 7a + 8b \\ 5a + 2b \\ \hline 2a + 6b. \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{r} 7a \\ 5a \end{array}}\right\} \text{subth.}$$

$$\begin{array}{r} 13a + 9b + 4x + 2d + 3y \\ 5a + 2b + x + 3y \\ \hline 8a + 7b + 3x + 2d \end{array} \ \text{subth.}$$

Setzet hier: $a = 1$, $b = 5$, $x = 9$, $d = 0$ und $y = 2$ und prüfet den Rest!

Prüfet den Rest, indem ihr ihn vom Minuend abziehet! Ferner: Addiret Rest und Subtrahend und vergleichet die Summe mit dem Minuend.

§. 4. Aufgaben über die Subtraction.

1) Suchet die Differenzen:
$2a - a, \quad 5b - 5b, \quad 4c - 3c, \quad 18x - 5x$

2) Rechnet die Differenz:
$$(7a + 9b) - (7a + 3b)$$

3) Ziehet den Ausdruck $3a + 8b + 2c$ von dem Aggregat $5a + 11b + 9c$ ab!

4) Welcher Rest bleibt, wenn von $7a + 9b + 4c + 3x$ der Ausdruck $5a + 8b + 4c + x$ abgezogen wird!

5) $\left.\begin{array}{r} 17a + 342x + 81y + 5z \\ 9a + 210x + 80y \end{array}\right\}$ subtrh.

6) Prüfet die Reste der Aufgaben 3, 4 und 5 auf die 3 Arten!

7) Bildet die Differenzen und addiret sie in folgendem Aggregat!
$$(3a - 2a) + (5b - 4b) + (6c - c) + (8b - 3b)$$

§. 5. Multiplication.

Wenn eine Größe so oft zu sich selbst gezählt wird (oder so viel mal genommen wird), als eine andere anzeigt, so entsteht das **Produkt** (oder Faktum) der zwei Größen.

Die erste Größe heißt **Multiplicandus**, die 2te **Multiplicator**, und beide auch **Faktoren**.

Die Bezeichnung ist: $p = a \times b$ oder $a \, . \, b$ oder ab. Z. B. $a + a + a + \ldots$. bmal zu sich selbst gezählt gibt b Einheiten, jede $= a$, oder $b \, . \, a$. Ebenso $b + b + b + \ldots\ldots$ amal zu sich selbst gezählt gibt a Einheiten, jede $= b$, oder $a \, . \, b$.

Man kann daher die 2 Faktoren verwechseln, also $p = a \, . \, b$, $p = b \, . \, a$, oder $3 \, . \, 4 = 12$ und $4 \, . \, 3 = 12$. Wenn noch weitere Faktoren hinzugekommen, so werden diese dem Produkte beigefügt, z. B. $a \, . \, b$ mit c multiplicirt gibt c Größen, jede $= ab$, oder $c \, . \, ab$ oder $ab \, . \, c$.

Dieselben Werthe haben auch die Produkte abc, acb, bac, bca, cab und cba.

Wenn eine Summe mit einer Größe multiplicirt werden soll, so wird jeder Posten mit der Größe verbunden. Z. B. $(a + b) \times c$ gibt $ac + bc$, denn wenn $a + b$ zu sich selbst cmal addirt wird, so erscheint a in dem Aggregat cmal und ebenso b auch cmal.

$$(14 + 3 + 7) \times 5 = 70 + 15 + 35 = 120$$

denn $\quad (14 + 3 + 7) \times 5 = 24 \times 5 = 120$

oder $(14 + 3 + 7) \, . \, 5$ ist $= 14 \, . \, 5 + 3 \, . \, 5 + 7 \, . \, 5$ also nach §. 1.
$$= 24 \, . \, 5 = 120.$$

$$6a \times 3a = 18aa, \quad a \, . \, 9b \, . \, 4x = 36abx$$

$$(5a + b) \times 2c = 10ac + 2bc$$

$$(3 + 4a + 8b) \times 5b = 15b + 20ab + 40bb.$$

Wenn ein Aggregat mit einem anderen multiplicirt werden soll, so wird jede Größe des einen Faktors mit jeder Größe des andern vervielfacht; man schreibt hierbei die 2 Faktoren unter einander und setzt die gleichen Produkte der einzelnen Glieder unter einander, um sie bequemer addiren zu können. Z. B.

$$(5 + 7) \times (3 + 4)$$

Hier soll $(5 + 7)$ sowohl mit 3 als auch mit 4 multiplicirt werden, man erhält daher:

$$\begin{array}{l} 5 + 7 \\ 3 + 4 \\ \hline 15 + 21 + 20 + 28 = 84 \text{ und } 12 \,.\, 7 \text{ ist auch } = 84. \end{array}$$

$(a + b) \times (2a + 3b)$. Hier soll $2a + 3b$ mit a und auch mit b multiplicirt werden, man erhält daher $a\,.\,(2a + 3b) + b(2a + 3b) =$
$= 2aa + 3ab + 2ab + 3bb = 2aa + 5ab + 3bb$.

Oder:

$$\begin{array}{lll} 2a & + 3b & \\ a & + \;\; b. & \\ \hline 2aa & + 3ab & \\ & \;\;\, 2ab & + 3bb \\ \hline 2aa & + 5ab & + 3bb. \end{array}$$

$$(7 + 5a + 2x) \times (4 + 3a + x)$$

$$\begin{array}{llllll} 7 & + \;\;5a & + 2x & & & \\ 4 & + \;\;3a & + \;\;x & & & \\ \hline 28 & + 20a & + \;\;8x & & & \\ & \;\;\;\;21a & & + 15aa & + \;\;6ax & \\ & & \;\;\;\;7x & & + \;\;5ax & + 2xx \\ \hline \end{array}$$

Produkt $= 28 + 41a + 15x + 15aa + 11ax + 2xx$

$(2a + b) \times (a + b) \times 5x$; hier werden zuerst die 2 ersten Faktoren multiplicirt und ihr Produkt dann mit dem 3ten Faktor vervielfacht. Man erhält hierdurch das Produkt:

$$10aax + 15abx + 5bbx.$$

Suchet dasselbe und prüfet es, indem ihr $a = 4$, $b = 3$ und $x = 5$ setzet!

§. 6. Aufgaben über die Multiplication.

1) Bildet folgende Produkte!
$5 \times 7a$, $4a \times 3$, $12c \times c$, $4b \times 3bc$, $17a \times 4bc$.
2) $2ag \times 3ag$, $5ab \times 3acd$, $6xy \times 8xz \times 3$.
3) $5abg \times 5aacd$, $3ax \times 5bx \times 2cd$.
4) $(2a + 5) \times 4$, $(7 + 9 + 3) \times 12$.
5) $(3a + 2b) \times 2a$, $(6a + 8b + 3c) \times 2ab$.
6) $(4 + 7) \times (9 + 8)$, $(a + b) \times (b + c)$.

7) $(2a + 5b) \times (3a + 2b)$.
8) $(6a + 7x) \times (5a + 2x)$.
9) $(4m + 3mn) \times (2m + 5mn)$.
10) $(3 + a) \times (4 + 2a) \times 5$.
11) $(2aa + 3ab + 5bb) \times (a + 3b)$.
12) $(4x + 2y + 6z) \times (2x + y + 3z)$.
13) $(7 + 8x + 3y) \times (2 + x) \times (5x + y)$.

Nehmet in 5, 7, 10, 12 und 13 für die Buchstaben beliebige Zahlen an und prüfet die Produkte!

§. 7. Division.

Durch Division findet man den einen Faktor eines gegebenen Produkts, wenn der andere Faktor bekannt ist.

Die Bezeichnung ist: $b : a = q$, wo $aq = b$ sein muß. Die Größe b, in welche getheilt wird, heißt Dividend (zu Theilendes), die Größe a Divisor (Theiler) und q, oder die Größe, welche angibt, wie oft der Theiler in dem zu Theilenden enthalten ist, heißt Quotient (das Wievielfache).

Jede Größe gibt durch sich selbst getheilt die Einheit, $a : a = 1$, denn $a \cdot 1 = a$.

Wenn $b : a = q$ gesetzt wird, so ist auch

$b : q = a$, denn in beiden Fällen ist $aq = b$, man kann daher Divisor und Quotient verwechseln.

$$16a : 2 = 8a \text{ und } 16a : 8a = 2.$$

Hieraus folgen 2 Proben für jede Division.

1) Man multiplicirt den Divisor und den Quotienten; so muß der Dividend erscheinen.

2) Man theilt mit dem Quotienten, so erhält man den Divisor.

Wenn eine Division nicht aufgeht, so schreibt man den Divisor als Nenner und den Dividend als Zähler eines Bruches, der dann die Stelle des Quotienten vertritt.

Z. B. $b : a = \frac{b}{a}$

$$3a : 4b = \frac{3a}{4b}, \quad 6a : 3b = 2\frac{a}{b}$$

Wird eine Summe durch eine Größe getheilt, so ist jedes Glied der Summe zu theilen, z. B.

$$(15 + 20) : 5 = \frac{15}{5} + \frac{20}{5} = 3 + 4 = 7,$$

denn: $(15 + 20) : 5 = 35 : 5 = 7$.

$(ab + ac) : a = b + c$, denn: $a(b + c) = ab + ac$

Ebenso muß auch $(ab + ac) : (b + c) = a$ sein, man theilt da-

her, wenn auch der Divisor ein Aggregat ist, mit dem ersten Posten des Divisors in den ersten des Dividendus und multiplicirt den dadurch erhaltenen Quotienten mit dem ganzen Divisor.

(Wenn es nöthig ist, so müssen die Posten vorher alphabetisch geordnet werden.)

3. B. $(aa + 5ab + 6bb) : (a + 2b) = a$

$aa + 2ab$

Rest: $3ab + 6bb$, wieder dividirt gibt $3b$

Divisor $\times$ $3b$ gibt: $3ab + 6bb$

0

Der Quotient ist demnach $a + 3b$.

Probe: $(a + 3b) \times (a + 2b)$ gibt: $aa + 5ab + 6bb$.

Weitere Beispiele:

1) $(2a + 8ab + 6ac) : 2a = 1 + 4b + 3c$

2) $(4a + 6b) : (2a + 3b) = 2$

$4a + 6b$

0

3) $(9aa + 12ab + 4bb) : (3a + 2b) = 3a + 2b$

$9aa + 6ab$

$6ab + 4bb$

$6ab + 4bb$

0

4) $(15dyy + 6cxx + 10dxy + 9cxy) : (2x + 3y)$

Ordnet zuerst den Dividendus, so folgt:

$(6cxx + 9cxy + 10dxy + 15dyy) : (2x + 3y) = 3cx + 5dy$

$6cxx + 9cxy$

Rest: $10dxy + 15dyy$

$10dxy + 15dyy$

0

Machet die 2 Proben!

§. 8. Aufgaben über die Division.

1) Suchet folgende Quotienten:

$70a : 14$, $6a : 6a$, $50ab : 5b$, $7ab : ab$

2) $9abcd : 3bc$, $14abcxy : 2cxy$

3) $(3a + 6b) : 3$, $(9m + 12mn) : 3m$

4) $(2a + 4ab + 9ac) : a$, $(9ab + 3bm + 6bn) : 3b$

5) $(12ab + 36bc) : (a + 3c)$

6) $(5aa + 7ax + 2xx) : (a + x)$

7) $(aa + 2ab + 2ac + bb + 2bc + cc) : (a + b + c)$

8) $(8aaa + 12aab + 6abb + bbb) : (2a + b)$

9) $(12cc + 15aa + 29ac + 2bb + 6bc + 15ab) : (3a + 4c + 2b)$
10) $(8xx + 112 + 60x + 60aa + 44ax + 164a) : (7 + 5a + 2x)$

Prüfet die Quotienten der Aufgaben 5, 7, 9 und 10 auf die 2 Arten.

§. 9. Rechnung mit Brüchen.

a) Jeder Bruch ist als eine angedeutete Division zu betrachten. Siehe §. 7.

b) Man kann in jedem Bruche Zähler und Nenner (Dividendus und Divisor) mit jeder Größe multipliciren und theilen, ohne den Werth des Bruches zu ändern. Es sei:

$$\frac{a}{b} = q, \text{ so ist auch } \frac{ac}{bc} = q,$$

weil $a : b = q$ also $bq = a$ ist und $ac : bc = q$ oder $bcq = ac$ sein muß, wenn $bq = a$ ist. Umgekehrt muß daher auch $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ sein. Man wendet diese 2 Sätze an, um Brüche zu verändern, z. B.

1) Der Bruch $\frac{3}{4}$ soll den Nenner 20 erhalten, so muß sein Nenner mit 5 multiplicirt werden, folglich auch sein Zähler, also $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$.

2) Der Bruch $\frac{abc}{acd}$ soll abgekürzt werden; theile Zähler und Nenner durch ac, so folgt: $\frac{b}{d}$.

c) Addition der Brüche.

Wenn Brüche gleiche Nenner haben, so ist ihre Summe = der Summe der Zähler getheilt durch den gemeinschaftlichen Nenner. Z. B.

$\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{10}{8}$, denn $(3 + 7) : 8 = \frac{3}{8} + \frac{7}{8}$ nach §. 7.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$, denn $(a + c) : b = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$.

Ebenso für 3 und mehr Brüche.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{f}{b} = \frac{a + c + f}{b}.$$

Sind aber die Nenner ungleich, so werden die Brüche auf einerlei Nenner gebracht, indem man einen gemeinschaftlichen Nenner sucht und dann nach §. 9. b. verfährt.

Z. B. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$

Im Allgemeinen ist der Hauptnenner gleich dem Produkte aller Nenner, man kann jedoch oft einen kleineren gemeinschaftlichen Nenner finden.

z. B. die Nenner seien: 12, 2, 6, 9 und 15. Nimmt man nun z. B. 2 als einen Faktor des gemeinschaftlichen Nenners, so muß dieser noch die weiteren Faktoren 6, 3, 9 und 15 enthalten, wird ferner noch 3 als ein Faktor des Hauptnenners genommen, so muß letzterer noch 2, 3 und 5 als Faktoren enthalten, der Hauptnenner ist daher = 2 . 3 . 5 mal den zwei früher als gemeinschaftlich betrachteten Faktoren 2 und 3, also = 2 . 3 . 5 . 2 . 3 = 180.

Man schreibt bei diesem Verfahren auf folgende Weise:

$$\begin{array}{l}
12 \;.\; 2 \;.\; 6 \;.\; 9 \;.\; 15 \quad : 2 \\
\hline
6 \;.\; 3 \;.\; 9 \;.\; 15 \quad : 3 \\
\hline
2 \;.\; 3 \;.\; 5
\end{array}$$

(1 wird weggelassen!)

daher Hauptnenner = 2 . 3 . 5 . 2 . 3 = 180.

Oder die Nenner seien: 3ab, ac, 6aa und 10abc.

$$\begin{array}{l}
3ab \;.\; ac \;.\; 6aa \;.\; 10abc \quad : 3 \\
\hline
ab \;.\; ac \;.\; 2aa \;.\; 10abc \quad : a \\
\hline
b \;.\; c \;.\; 2a \;.\; 10bc \quad : b \\
\hline
c \;.\; 2a \;.\; 10c \quad : 2 \\
\hline
c \;.\; a \;.\; 5c \quad : c \\
\hline
a \;.\; 5
\end{array}$$

Daher ist der Hauptnenner = 3ab . 2c . a . 5 = 30aabc. Man hätte diesen Nenner jedoch auf kürzere Art aus der Betrachtung der einzelnen Nenner finden können, und die obige Methode wird auch gewöhnlich nur bei Zahlen angewendet.

Addiret z. B. folgende Brüche: $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{12} + \frac{5}{9} + \frac{7}{18}$.

Addiret ferner folgende Brüche: $\frac{x}{b} + \frac{x}{2b} + \frac{5y}{4b}$.

Hier sind alle Nenner in der Größe 4b enthalten, daher erhält man auf ähnliche Weise wie bei Zahlenbrüchen:

$$\begin{array}{c|l}
 & 4b \\
\frac{x}{b} & 4 = 4x \\
\frac{x}{2b} & 2 = 2x \\
\frac{5y}{4b} & 1 = 5y
\end{array}$$

4b ist der Hauptnenner, in diesen wird mit jedem Nenner getheilt, und den Quotienten multiplicirt man dann mit dem Zähler des Bruches.

$$\text{Summe} = \frac{6x + 5y}{4b}$$

$$\frac{3a}{a+b} + \frac{b}{c+b} + \frac{2b}{a+b} = \frac{3a(b+c) + b(a+b) + 2b(b+c)}{(a+b) \;.\; (b+c)}$$

u. s. w.

d) Subtraction der Brüche.

Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, so werden ihre Zähler subtrahirt und der Nenner wird darunter gesetzt; Brüche mit ungleichen Nennern werden zuerst auf gleiche Nenner gebracht.

$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$, weil: $\frac{a-c}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a-c+c}{b} = \frac{a}{b}$ ist.

(Rest und Subtrahend müssen zusammen den Dividend geben nach §. 3.)

$$\frac{31}{40} - \frac{21}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}, \text{ denn } \frac{10}{40} + \frac{21}{40} = \frac{31}{40}.$$

$\frac{9}{10} - \frac{7}{15}$, der gemeinschaftliche Nenner ist 30,

daher: $$\frac{9}{10} - \frac{7}{15} = \frac{27}{30} - \frac{14}{30} = \frac{13}{30}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

e) Multiplication und Division der Brüche.

Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einer Größe c multiplicirt werden soll, so multiplicirt man den Zähler mit der Größe c und setzt den Nenner darunter, also $\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b}$,

denn $\frac{a}{b}$ mit c multipliciren, heißt (nach §. 5.) $\frac{a}{b}$ soll c mal zu sich selbst addirt werden, man erhält daher:

$$\frac{a}{b} . c = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots\ldots (c \text{ mal})$$

$$= \frac{a + a + a + \ldots\ldots (c \text{ mal})}{b} \text{ also } = \frac{ac}{b}.$$

Da man die Faktoren nach §. 5. verwechseln kann, so ist auch $\frac{a}{b} . c = c . \frac{a}{b}$, da $\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b}$, so muß auch $c . \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$ sein, wenn daher eine Größe c mit einem Bruch multiplicirt werden soll, so wird sie mit dem Zähler multiplicirt und der Nenner darunter gesetzt, wie im ersten Falle.

Soll aber ein Bruch durch eine Größe getheilt werden, so wird der Nenner mit der Größe multiplicirt, oder:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}; \text{ weil } \frac{a}{bc} . c = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

Wenn 2 Brüche multiplicirt werden sollen, so dividirt man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner, oder $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, denn: man denke sich $\frac{a}{b}$ zuerst mit c multiplicirt, so muß ein Produkt erscheinen, welches d mal größer ist als das gesuchte (weil der Faktor nicht c, sondern $\frac{c}{d}$ heißt), dieses

Produkt muß daher noch mit d getheilt werden, um das richtige Produkt zu erhalten, also:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}, \quad \frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd}, \text{ folglich}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9} = \left(\frac{5}{8} \cdot 7\right) : 9 = \frac{35}{8} : 9 = \frac{35}{72}.$$

Wenn eine Größe a mit einem Bruche $\frac{b}{c}$ getheilt werden soll, so kehrt man den Bruch um $\left(\frac{c}{b}\right)$ und multiplicirt ihn dann mit der Größe a, also $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, denn: $\frac{ac}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{abc}{bc} = a$ (Quotient mal Divisor geben den Dividend; daher ist das Resultat richtig). Ebenso wird verfahren, wenn man einen Bruch durch einen andern theilen soll. Z. B.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

denn $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$

Man kann jede Größe, welche kein Bruch ist, als einen solchen Bruch betrachten, dessen Nenner = 1 ist; z. B. $a = \frac{a}{1}$, und die bisher gegebenen Regeln für die verschiedenen Fälle lassen sich dann in folgende zwei zusammenfassen:

1) Für die Multiplication: Man multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

2) Für die Division: Man kehrt den Divisor um und multiplicirt ihn dann mit dem Dividendus.

Beispiele.

$$\frac{3}{40} \cdot 7 = \frac{3}{40} \cdot \frac{7}{1} = \frac{21}{40}$$

$$9 : \frac{5}{8} = \frac{9}{1} \cdot \frac{8}{5} = \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{10} : 5 = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{50}, \quad \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15} = \frac{40}{180} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{7}{12} : \frac{3}{10} = \frac{7}{12} \cdot \frac{10}{3} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18} = 1\frac{17}{18}$$

$$\frac{3ab}{2cd} \cdot 7d = \frac{21abd}{2cd} = 10\frac{1}{2}\,\frac{ab}{c}$$

$$\frac{12ab}{7cf} \cdot \frac{14cg}{3af} = \frac{12 \cdot 14abcg}{7 \cdot 3acff} = \frac{8bg}{ff}$$

(Man kann auch vor dem Ausmultipliciren die gleichen Größen im Zähler und Nenner weglassen.)

$$\frac{10ax}{bd} : 5a = \frac{10ax}{bd} \cdot \frac{1}{5a} = \frac{2x}{bd}$$

$$\frac{17abx}{3dy} : \frac{8by}{9fy} = \frac{17abx \cdot 9fy}{3dy \cdot 8bx} = \frac{51af}{8d}$$

$$3\frac{7}{8} \cdot 5\frac{4}{7} = \frac{31}{8} \cdot \frac{39}{7} = \frac{1209}{56} = 21\frac{33}{56}$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\times\left(d+\frac{f}{g}\right) = \frac{ac+b}{c}\times\frac{dg+f}{g} = \frac{(ac+b)(dg+f)}{cg}$$

Die Multiplication läßt sich hier auch ausführen, ohne daß man nöthig hat die Größen a und d in Brüche zu verwandeln.

$$5\frac{8}{9} : \frac{7}{4} = \frac{53}{9} : \frac{7}{4} = \frac{53 \cdot 4}{9 \cdot 7} = \frac{212}{63} = 3\frac{23}{63}.$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right) : \left(f+\frac{g}{x}\right) = \frac{ac+b}{c} : \frac{fx+g}{x} = \frac{(ac+b)x}{c(fx+g)}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{g} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{f}{g} = \frac{acf}{bdg}.$$

Dasselbe Verfahren gilt also auch bei der Multiplication von mehr als 2 Brüchen.

$$\frac{3a}{10b} \cdot \frac{35b}{4c} \cdot \frac{30c}{7a} = \frac{3 \cdot 35 \cdot 30 \cdot abc}{10 \cdot 4 \cdot 7 \cdot abc} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}.$$

§. 10. Aufgaben über die Bruchrechnung.

a) Addition.

1) $\frac{3a}{8} + \frac{7a}{8}$, $\frac{5b}{2c} + \frac{3b}{2c}$, $\frac{c}{3x} + \frac{d}{3x}$

2) $\frac{5}{2}x + \frac{7}{9}x + \frac{3}{8}x$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{f}{g}$

3) $\frac{2ac+3bc}{d} + \frac{4ac+3bc}{d} + \frac{7ac}{2d}$

4) $\frac{2x}{3y} + \frac{5x}{4ay} + \frac{2y}{3a}$

5) $\frac{3nb}{a+b} + \frac{4na}{c(a+b)} + \frac{2n}{c}$

b) Subtraction.

1) $\frac{5a}{3} - \frac{2a}{3}$, $\frac{2b}{a} - \frac{b}{a}$, $\frac{5c}{2ad} - \frac{3b}{2ad}$

2) $\frac{4ax}{c} - \frac{3ax}{2c}$, $\frac{2xy}{bd} - \frac{5xy}{6bd}$, $\frac{6a}{7b} - \frac{3a}{5b}$

3) $\frac{9a}{10x} - \frac{12a}{25xy}$, $\frac{24a+5b}{3cd} - \frac{3b}{4cd}$

4) $6a - \frac{3a}{5}$, $8ab - \frac{2ad}{3b}$

5) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) - a$, $\left(\frac{3ab}{cd} + \frac{2bc}{ad}\right) - \frac{2ab}{3cd}$

c) Multiplication.

1) $\frac{3a}{5} \times 10$, $\frac{7a}{15b} \cdot 3b$, $\frac{3x}{4y} \cdot 8y$, $4z \cdot \frac{3m}{2y}$

2) $\frac{5}{x} \cdot \frac{x}{5}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{bc}{ad}$, $\frac{ab}{cd} \cdot \frac{fd}{ag}$

3) $\frac{6ac}{bx} \cdot \frac{3b}{x} \cdot \frac{x}{9c}$, $\frac{4m}{3n} \cdot \frac{7n}{4q} \cdot \frac{6r}{m} \cdot q$

4) $(2a + 3b) \cdot \frac{1}{ab}$, $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right) \cdot \frac{ab}{4}$

5) $\left(\frac{3x}{8} + \frac{2y}{5}\right) + \frac{30b}{xy}$, $\left(\frac{4m}{3n} + \frac{3n}{2m}\right) \times \frac{3n}{4m}$

6) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{x}\right) \times \left(b + \frac{x}{c}\right)$

7) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \times \left(\frac{d}{a} + \frac{b}{c}\right)$

8) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{x} + \frac{d}{y}\right) \times \left(\frac{b}{a} + \frac{x}{c}\right)$

9) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u}\right) \times \left(\frac{2x}{3y} + \frac{3y}{4z}\right)$

10) $\left(\frac{aa}{bb} + \frac{4ac}{bd} + \frac{4cc}{dd}\right) \times \left(\frac{2a}{3b} + \frac{4c}{3d}\right)$.

d) Division.

1) $5a : \frac{b}{c}$, $\frac{3ab}{cd} : 5a$, $\frac{7abd}{3cx} : 2ad$

2) $\frac{5a}{3} : \frac{4a}{5}$, $\frac{7x}{a} : \frac{3x}{b}$, $\frac{2mn}{3x} : \frac{4n}{9x}$

3) $\left(\frac{7ab}{4cd} \times \frac{3c}{7d}\right) : \frac{12ab}{5d}$, $\left(a + \frac{bc}{d}\right) : \frac{d}{ac}$

4) $\left(\frac{4a}{b} + 4 + \frac{b}{a}\right) : \left(2 + \frac{b}{a}\right)$

(Dividiret ohne vorher die Glieder zu vereinigen)!

5) $\left(\frac{4aa}{9bb} + \frac{4a}{3b} + 1\right) : \left(\frac{2a}{3b} + 1\right)$

6) $\left(\frac{25b}{4xx} + \frac{5}{xy} + \frac{1}{byy}\right) : \left(\frac{5b}{2x} + \frac{1}{y}\right)$.

§. 11. Vom gemeinschaftlichen Maaße zweier Größen.

Wenn 2 Größen Vielfache von einer und derselben Größe sind, so nennt man diese das gemeinschaftliche Maaß oder den gemeinschaftlichen Theiler der 2 Größen, z. B. $A = m . a$, $B = n . a$, $18 = 2 . 9$ und $27 = 3 . 9$, die gemeinschaftlichen Theiler sind hier a und 9. Sind nun mehrere Faktoren in beiden Größen einander gleich; so nennt man das Produkt der gleichen Faktoren den größten gemeinschaftlichen Theiler, oder das größte gemeinschaftliche Maaß. Z. B. $70 = 2 . 7 . 5$ und $105 = 3 . 7 . 5$, also ist der größte Theiler $= 7 . 5 = 65$. $A = a . b\ c . d . e$, $B = bcefg$, hier ist bce das größte gemeinschaftliche Maaß der Größen A und B. Wenn 2 Größen nicht in ihren einzelnen Faktoren gegeben sind, sondern als ausgerechnete Produkte erscheinen, so findet man das größte gemeinschaftliche Maaß auf folgende Art.

Man theilt mit der einen (kleineren) Größe in die andere, mit dem Rest wieder in die erste, mit dem neuen Rest in den vorhergehenden Rest u. s. w., bis die Division aufgeht; der letzte Divisor ist dann das größte gemeinschaftliche Maaß.

Z. B. die 2 Zahlen 252 und 735.

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & & 1 & & 11 & \\ 735 & : & 252 & : & 231 & : & 21 . \\ \underline{504} & & \underline{231} & & \underline{231} & & \\ 231 & & 21 & & 0 & & \end{array}$$

Hier ist 21 der größte gemeinschaftliche Theiler,

denn: $231 = 11 . 21$

also $252 = 1 . 231 + 21 = 11 . 21 + 21 = 12 . 21.$

und $735 = 2 . 252 + 231 = 24 . 21 + 11 . 21 = 35 . 21.$

Oder allgemein für 2 Größen A und B

$A : B$ sei $= m$ und der Rest sei $= C$

$B : C$ „ $= n$ „ „ „ „ $= D$

$C : D$ „ $= p$ „ „ „ „ $= 0$,

so ist: $C = D . p$ und:

$B = nC + D = n . Dp + D$,

also $A = m . B + C = mnpD + mD + Dp$

und nun läßt sich sowohl A als B durch D oder den letzten Divisor theilen.

Um zu beweisen, daß D der größte gemeinschaftliche Theiler ist, nehme man an, es könnte ein anderer größerer Theiler z. B. $M > D$ statt finden, so ist $A = Bm + C$, wäre A und B nun durch M theilbar, so müßte auch C durch M theilbar sein; ferner ist $B = Cn + D$, da nun B und C durch M theilbar wäre, so müßte

auch D durch M theilbar sein, was unmöglich ist, da M > D angenommen wurde; es ist also kein größerer Theiler möglich als D.

Man wendet den gemeinschaftlichen Theiler an, um Brüche abzukürzen. Z. B. Es sei $\frac{315}{385}$ gegeben, so ist das größte gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners = 35; folglich, wenn beide durch 35 getheilt werden, so erhält man $\frac{9}{11}$.

$\frac{3456}{4752}$ gibt $\frac{8}{11}$, denn

```
  1       2       1     2
4752 : 3456 : 1296 : 864 : 432, also ist 432 der Theiler.
3456   2592    864   864
----   ----    ---   ---
1296    864    432     0
```

$\frac{279}{313}$ kann nicht abgekürzt werden, denn

```
  1     8    4   1   6
313 : 279 : 34 : 7 : 6 : 1, daher ist 1 der Theiler.
279   272   28   6   6
---   ---   --   -   -
 34     7    6   1   0
```

Eine Zahl, welche nur durch sich selbst, oder durch 1 getheilt werden kann, heißt **Primzahl**, z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 u. s. w.; und wenn 2 Zahlen keinen anderen gemeinschaftlichen Theiler haben als die Zahl 1, so nennt man sie **relative Primzahlen**. Z. B. 279 und 313 sind relative Primzahlen, obgleich 279 mit 9 getheilt werden kann, weil nicht beide den Faktor 9 oder irgend einen anderen enthalten.

Auch auf die Verkürzung von Buchstabenbrüchen ist diese Methode anwendbar; wie in **II.** §. 10 *e* Aufgabe 6 und 7 gezeigt wird; wir wollen hier nur eine allgemeine Aufgabe lösen:

Es sei das größte gemeinschaftliche Maaß der zwei Größen $aa + 5ab + 6bb$ und $aa + 3ab + 2bb$ zu finden:

$$(aa + 5ab + 6bb) : (aa + 3ab + 2bb) = 1$$
$$\underline{aa + 3ab + 2bb}$$
Rest $= 2ab + 4bb$, oder $= 2b(a + 2b)$

$$(aa + 3aa + 2bb) : (a + 2b) = a + b$$
$$\underline{aa + 2ab}$$
$$ab + 2bb$$
$$\underline{ab + 2bb}$$
$$0$$

Der größte gemeinschaftliche Theiler ist daher $= a + 2b$.

Suchet ferner den Theiler der 2 Größen:

$(4xx + 9xy + 5yy)$ und $(xx + 2xy + yy)$.

Der erste Rest ist $= y(x + y)$, theile daher den Divisor durch $x + y$, so folgt als größter Theiler $x + y$.

Ueber die Reduction von Zahlenbrüchen.

Zahlenbrüche lassen sich auch noch auf andere Art abkürzen. Man hat nämlich gewisse **Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahlen.**

Diese Kennzeichen sind folgende:

1) Jede gerade Zahl läßt sich durch 2 theilen; denn wenn man irgend eine Zahl mit 2 multiplicirt, so entsteht eine gerade Zahl.

2) Wenn die letzten 2 Ziffern einer Zahl, als besondere Zahl betrachtet, durch 4 theilbar sind, so ist auch die Zahl selbst durch 4 theilbar; denn da $100 : 4 = 25$ ist, so ist auch jede beliebige Anzahl von Hunderten, also auch die Tausende u. s. w. durch 4 theilbar; es hängt daher die Theilbarkeit nur von den Zehnern und Einern ab.

3) Sind die 3 letzten Ziffern, als besondere Zahl betrachtet, durch 8 theilbar, so kann auch die ganze Zahl durch 8 getheilt werden. Man denke sich die Zahl in 2 Theile zerlegt, wovon der eine die Tausende und die höheren Stellen enthält, und der andere aus den Hunderten, Zehnern und Einern besteht; so läßt sich der erste Theil immer durch 8 theilen, weil $1000 : 8 = 125$ ist; die Theilbarkeit ist daher durch die 3 letzten Ziffern (den 2ten Theil) bedingt.

4) Durch 16, 32, 64 u. s. w. ist eine Zahl dann theilbar, wenn die 4, 5, 6 . . . . letzten Ziffern durch 16, 32 u. s. w. theilbar sind; der Grund dieses Satzes beruht wieder darauf, daß 10000 durch 16 theilbar ist u. s. w.

5) Wenn die letzte Ziffer einer Zahl eine Null oder 5 ist, so läßt sich die Zahl durch 5 theilen; denn eine gerade Zahl mit 5 multiplicirt gibt als letzte Ziffer eine Null, während man bei einer ungeraden Zahl als letzte Ziffer des Produkts 5 erhält.

6) Wenn die Quersumme der Ziffern einer Zahl durch 3 oder 9 theilbar ist, so läßt sich auch die Zahl durch 3 oder 9 theilen; denn:

Die Ziffern seien z. B. a, b, c und d, so sind a die Tausende, b die Hunderte, c die Zehner und d die Einer Die Zahl heißt demnach $1000a + 100b + 10c + d$, diese läßt sich $= 999a + a + 99b + b + 9c + c + d$ setzen; nun ist aber $999a + 99b + 9c$ jedenfalls durch 3 und 9 theilbar, wenn daher auch noch $a + b + c + d$ (also die Quersumme der Ziffern) durch 3 oder 9 theilbar sind, so ist auch die ganze Zahl durch 3 oder 9 theilbar.

Anmerkung.

Man hat noch mehr solche Kennzeichen, z. B. für 7, 11 u. s. w., deren Anwendung jedoch meist größere Rechnungen nöthig machen als die Theilung selbst. Z. B.:

Durch 11 ist eine Zahl dann theilbar, wenn die Summe der 1ten, 3ten, 5ten u. s. w. Ziffer entweder gleich der Summe der 2ten, 4ten, 6ten u. s. w. Ziffer ist; oder wenn wenn diese Summen um 11, 22, oder überhaupt um ein Vielfaches von 11 differiren.

Wenn eine Zahl mehrere der Kennzeichen (wie in Nro. 1 bis 6) enthält; so läßt sie sich durch das Produkt aller Zahlen theilen, deren Kennzeichen sie enthält. Z. B.:

Wenn eine Zahl gerade ist und das Kennzeichen für 9 besitzt, so ist sie durch 18 theilbar, oder wenn die 3 letzten Ziffern durch 8 und die ganze Quersumme durch 9 theilbar sind, so geht die Zahl durch 9 . 8 oder durch 72 ohne Rest auf u. s. w.

Haben nun Zähler und Nenner eines Bruches die gleichen Kennzeichen, so kann der Bruch durch die betreffende Zahl abgekürzt werden.

Z. B. $\frac{9144}{9360}$, durch 9 und 8, folglich auch durch 72, man erhält daher $\frac{127}{130}$

: 8 : 9 : 7

$$\frac{1008}{2520} = \frac{126}{315} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}.$$

: 9 : 4 : 8 : 2

$$\frac{1728}{5760} = \frac{192}{640} = \frac{48}{160} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

§. 12. Aufgaben über das gemeinschaftliche Maaß.

1) Wie heißt das gemeinschaftliche Maaß von **aabcd** und **acfg**?

2) Suchet das gemeinschaftliche Maaß der 2 Größen **6abbcd** und **9abdf**!

3) Wie heißt der gemeinschaftliche Theiler der 2 Zahlen 248 und 310, und von 363 und 440?

4) Wie heißt die größte Zahl, mit welcher sich die 2 Zahlen 1820 und 3003 theilen lassen?

5) Kürzet folgende Brüche ab!

$$\frac{587}{1761},\quad \frac{297}{330},\quad \frac{7800}{12285},\quad \frac{18550}{2862}.$$

6) $$\frac{9184}{72160},\quad \frac{193}{311},\quad \frac{4032}{10080},\quad \frac{118872}{187200},$$

(Wie heißen die 2 Zahlen 193 und 311 in Beziehung auf ein gemeinschaftliches Maaß?)

7) Kürzet den Bruch $\frac{18xy + 6xx + 15y + 5x}{9xy + 3xx + 6y + 2x}$ ab!

§. 13. Von den entgegengesetzten Größen.

Wenn von einer Zahl eine größere Zahl subtrahirt werden soll, so wird nicht nur die erste Zahl verschwinden, sondern es wird noch ein Theil der größeren Zahl übrig bleiben, welcher noch abzuziehen ist; z. B. **4 — 7**.

Von 4 können nur 4 Einheiten subtrahirt werden, wodurch die erste Zahl zu Null wird (§. 3.); nun sind aber noch 3 weitere Einheiten abzuziehen, dieses deutet man dadurch an, daß der Zahl 3 das Subtractionszeichen vorgesetzt wird (**— 3**).

— 3 ist daher um 3 kleiner als Null, während **+ 3** (oder **0 + 3**) um drei Einheiten größer ist als Null.

Wird nun die Zahl — 3 einer andern Zahl z. B. 5 hinzugefügt, so wird diese = 2, die Zahl 5 wird also um 3 kleiner, während durch das Zusetzen von + 3 die Zahl 5 um 3 größer würde (nämlich = 8).

Man nennt nun + 3 und — 3 entgegengesetzte Größen,

weil durch das Hinzufügen beider zu einer andern Zahl die eine eine Vermehrung, die andere eine Verminderung hervorbringt. Ebenso sind + a und — a entgegengesetzte Größen und man nennt die Größe + a eine bejahende oder positive (oder auch additive), die Größe — a eine negative oder verneinende (subtractive).

Wenn Jemand z. B. 500 fl. Vermögen hat und hiezu noch weitere 300 fl. Vermögen erhält, so wird er im Ganzen 500 + 300 = 800 fl. Vermögen besitzen; hat er aber bei den 500 fl. Vermögen 300 fl. Schulden, so besitzt er nur 500 — 300 = 200 fl. reines Vermögen; im ersten Falle ist die Zahl 300 (das Vermögen) eine bejahende, im andern aber bedeutet 300 das Entgegengesetzte (nämlich Schulden), die Zahl ist hier eine verneinende Größe.

Hat A 500 fl. Vermögen (+ 500) und 500 fl. Schulden (— 500), so besitzt er + 500 — 500, d. h. Nichts. Hat aber A z. B. 300 fl. Schulden und es kommen hierzu noch weitere 500 fl. Schulden, so besitzt er im Ganzen — 800, (800 fl. Schulden) oder er hat 800 fl. weniger als Nichts.

Dieser Gegensatz der Größen läßt sich noch bei vielen anderen Dingen nachweisen, z. B.:

Wenn man eine Bewegung eines Körpers nach einer bestimmten Richtung als positiv betrachtet, so muß jede Bewegung nach der entgegengesetzten Seite, in Bezug auf die erste, als eine negative erscheinen; im ersten Falle nähert sich der Körper einem vorwärts liegenden Orte, im 2ten Falle entfernt er sich von diesem Orte.

Bewegt sich der Körper z. B. 500 Fuß vorwärts (+ 500) und dann noch weitere 300 Fuß nach derselben Richtung (+ 300), so hat er im Ganzen um 800 Fuß sich einem vorwärts liegenden Orte genähert, also um + 800 Fuß.

Bewegt sich der Körper aber zuerst 500 Fuß vorwärts (+ 500) und dann 300 Fuß rückwärts (— 300), so hat er sich dem vorwärts liegenden Orte im Ganzen nur um 200 Fuße genähert, also + 500 — 300 = + 200; geht der Körper 500 Fuß vorwärts (+ 500) und dann 500 rückwärts (— 500), so kommt er wieder an seinen anfänglichen Ort; er hat sich dem vorwärts liegenden Orte im Ganzen gar nicht genähert, das Resultat seiner Bewegung ist = Null, (+ 500 — 500 = 0).

Wenn sich endlich der Körper 500 Fuß und noch weitere 300 Fuß rückwärts bewegt, so hat er sich um 800 Fuß weiter von dem vorwärts liegenden Orte entfernt, er ist 800 Fuß rückwärts gelangt (— 800 = — 500 — 300); es findet dann keine Annäherung (+ Bewegung), sondern eine Entfernung des Körpers (— Bewegung) statt.

Man hat daher:

1) + 500 + 300 = + 800
2) + 500 — 300 = + 200
3) + 500 — 500 = 0
4) — 500 — 300 = — 800.

Ferner muß — 500 + 300 = — 200 sein, denn statt — 500 kann man — 200 — 300 setzen, daher:

$$- 500 + 300 = - 200 - 300 + 300 = - 200.$$

Hat Jemand z. B. 300 fl. Vermögen (+ 300) und 500 fl. Schulden (— 500), so hat er, wenn er mit seinem Vermögen einen Theil der Schulden bezahlt, immer noch 200 fl. Schulden (— 200), oder 200 fl. weniger als Nichts.

Zwei gleiche entgegengesetzte Größen heben sich auf.

Werden 2 ungleiche entgegengesetzte Größen verbunden, so hebt die kleinere von der größeren so viele Einheiten auf, als jene selbst

Einheiten hat und es bleiben daher noch Einheiten der größeren übrig.

3. B. $+30+60=+90$
$+30-30=0$
$+40-10=+30$
$-40+10=-30$
$-40-10=-50.$

Ebenso muß auch $+6a-4a=+2a$, und $+6b-7b=-b$, so wie $-3a-5a=-8a$ sein.

Das Zeichen $+$ kann man auch weglassen, wenn die Größe am Anfange eines Ausdrucks, oder einzeln vorkommt.

§. 14. Rechnung mit entgegengesetzten Größen.

a) Addition.

1) Zwei gleiche entgegengesetzte Größen heben sich auf.

2) Wenn die Zeichen gleich sind, so summirt man die Größen und die Summe erhält das gemeinschaftliche Zeichen.

3) Bei ungleichen entgegengesetzten Größen wird die kleinere von der größeren abgezogen und der Rest erhält das Zeichen der größeren.

3. B. $3a+5a=8a$, $-2b-4b=-6b$
$9x-7x=2x$, $-11x+3x=-8x$
$-20m+11m+9m=-20m+20m=0.$

Wenn eine Größe mehr als zweimal vorkommt, so bildet man die Summe der positiven und die der negativen und verbindet dann beide Summen.

$$\left.\begin{array}{rrrr} 3a & +\ 8b & -7c & +\ d \\ 9a & +\ 5b & -3c & -\ f \\ -7a & +13b & +8c & +2d \\ -2a & -11b & +2c & -3f \end{array}\right\} \text{gibt:} \left\{\begin{array}{rrrr} 12a & +26b & -10c & +3d \\ -9a & -11b & +10c & -4f \\ \hline 3a & +15b & +\ 3d & -4f \end{array}\right.$$

b) Subtraction.

Man gebe dem Subtrahenden das umgekehrte Zeichen und addire dann; denn:

Es sei $+b$ oder $-b$ von a abzuziehen, so setze $a=a+b-b$, wird nun $+b$ weggenommen, so bleibt $a-b$ als Rest.
„ aber $-b$ „ „ „ „ $a+b$ „ „

3. B.				
	$4a$,	$13b$,	$9c$,	-5
	$2a$,	$-2b$,	$-3d$,	-3
	$2a$,	$15b$,	$9c+3d$,	-2

(Man kann die Umkehrung der Zeichen, der Bequemlichkeit wegen, auch wirklich andeuten.)

$$\begin{array}{l} 3a + 2b - 7c + 8d - 9m + 2x + 2y \\ 3a - 4b + c + 13d - 17m - 2n + 3z \\ - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \\ \hline 6b - 8c - 5d + 8m + 2x + 2n + 2y - 3z \end{array} \Big\} \text{ abgez.}$$

c) Multiplication.

Gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche ein negatives Produkt. Z. B.

$-3 \,.\, 4 = -12$, denn: $+3 - 3 = 0$, multiplicirt man nun mit $4 = 4$,

so folgt: $+12 - 12 = 0$

es muß nämlich -12 geben, weil die Summe sonst nicht $= 0$ wäre.

$-3 \,.\, -4 = 12$, denn: $+3 - 3 = 0$, multiplicirt man mit $-4 = -4$

so folgt: $-12 + 12 = 0$.

Hier muß $-3 \,.\, -4 = +12$ sein, weil die linke Seite $= 0$ sein muß. Oder: $2a - a = a$, $b = b$ } multip.

$2ab \pm ab = ab$, $+ab$ ist hier unmöglich, weil sonst $2ab + ab = ab$ wäre,

daher $-a \,.\, b = -ab$.

Ferner: $2a - a = a$, $-b = -b$ } multip.

$-2ab \pm ab = -ab$

$-a \,.\, -b$ muß $+ab$ geben; weil für die Annahme $-ab$ die Größe $-2ab - ab = -ab$ wäre, was unmöglich ist.

Daher $-a \,.\, -b = +ab$.

Beispiele:

$3 \;\; 5 = 15$, $-3 \,.\, 5 = -15$, $-3 \,.\, -5 = 15$.

$2a \,.\, -3a = -6aa$, $-5x \,.\, -2x = 10xx$.

Wenn mehr als 2 Faktoren da sind, so hängt das Zeichen des Produkts von der Zahl der negativen Faktoren ab; ist diese eine gerade, so wird das Produkt $+$, ist sie eine ungerade, so wird es $-$.

Denn je 2 negative Faktoren geben ein $+$ Produkt und jede gerade Zahl solcher Faktoren läßt sich in irgend eine Anzahl von Paaren zerlegen, wovon jedes $+$ wird, das ganze Produkt muß daher auch $+$ sein; kommt nun noch ein weiterer negativer Faktor hinzu, so wird das ganze Produkt $-$.

$$-a \,.\, -b \,.\, -c \,.\, -d = +ab \,.\, +cd = abcd$$
$$-a \,.\, -b \,.\, -c \,.\, d = +ab \,.\, -cd = -abcd$$
$$-a \,.\, -b \,.\, -c \,.\, -d \,.\, -e = ab \,.\, cd \,.\, -e = -abcde.$$

Im Uebrigen ist das Verfahren bei der Multiplication entgegengesetzter Größen dasselbe wie in §. 5.

$$3a \,.\, -5b \,.\, -2c = 30abc$$

$$\frac{5a}{b} \times -\frac{7b}{10c} \times cd = -\frac{35abcd}{10bc} = -\frac{7}{2}ad$$

$$(4 + 3b - 5c) \times -3 = -12 - 9b + 15c\ .$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 + 2a - 7b \\ 2 - 3a + 9b \end{array}\right\} \text{zu multipliciren.}$$

$$\begin{array}{l} 6 + 4a - 14b \\ \quad\; - 9a \qquad\quad - 6aa + 21ab \\ \qquad\quad + 27b \qquad\quad + 18ab - 63bb \\ \hline 6 - 5a + 13b - 6aa + 39ab - 63bb. \end{array}$$

d) Division.

In Bezug auf die Zeichen gilt dieselbe Regel wie bei der Multiplication, oder:

$$a:b = \frac{a}{b},\quad a:-b = -\frac{a}{b},\quad -a:b = -\frac{a}{b},\quad -a:-b = \frac{a}{b}$$

Um die Richtigkeit der Quotienten zu prüfen, multiplicire man den Quotienten mit dem Divisor, so wird der Dividend erscheinen.

Beispiele. $\quad -5abc : ac = -5b$

$$\frac{6abd}{fgm} : -\frac{3b}{gh} = -\frac{6abd}{fgm} \times \frac{gh}{3b} = -\frac{2adh}{fm}$$

$$(-30a + 24b - 36) : -6 = 5a - 4b + 6.$$

$$(25aa - 10ab + bb) : (5a - b) = 5a - b$$

$$\begin{array}{l} 25aa - 5ab \\ -\qquad\; + \\ \hline \qquad\quad - 5ab + bb \\ \qquad\quad - 5ab + bb \\ \qquad\quad + \qquad\; - \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$$(36xx - 9yy) : (2x + y) = 18x - 9y$$

$$\begin{array}{l} 36xx + 18xy \\ -\qquad\; - \\ \hline \qquad\quad - 18xy - 9yy \\ \qquad\quad - 18xy - 9yy \\ \qquad\quad + \qquad\; + \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

(Man setzt hier und in ähnlichen Fällen die Größe $-18xy$ vornen hin, damit man mit 2x theilen kann.)

§. 15. Aufgaben über die Rechnung mit entgegengesetzten Größen.

a) Addition.

1) $3a - 4a + 7a - 8a + 9a$

2) $-4x + 9y + 3x - 7x + 2y - 3y$

3) $a + 3b + 3b - a - 6b$

4) $\left\{\begin{array}{l} 3a + 7b - 4c + 2d \\ 5a - 9b + 4c - d \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{l} 2ac - 3bd + 8cx - y + 12 \\ 9ac - 7bd - 12cx + z - 10 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{l} 16a - 3b + 4c + 8m \\ -19a + 5b - 2c - 7n \\ 3a + b - 2c + 3n. \end{array}\right.$

Nehmet für die Buchstaben a, b, c.... verschiedene Zahlenwerthe an und vergleichet die anfänglichen Werthe mit dem Werth der Summe!

b) Subtraction.

1) Nro. 4 und 5 der Addition behandelt als Subtraction.

2) $\left.\begin{array}{l} 2aa - 7ab + 9cc - xy + 5 \\ -9aa + 14ab + 9cc - 7z + 3 \end{array}\right\}$

Prüfet die Resultate durch die Addition.

3) Wenn ein — vor einer Klammer steht, wie müssen die Zeichen der einzelnen in der Klammer befindlichen Größen geändert werden?

Z. B. $a + 3b - 4c - (a + 5b - 4c)$.

c) Multiplication.

1) $3a \times -2b$, $\quad -7 \times -\frac{15}{7}$

2) $-9ab \times -\frac{3a}{b}$, $\quad -\frac{7ac}{9} \times \frac{3b}{c}$

3) $\frac{3ax}{5} \cdot -\frac{5b}{3a} \cdot \frac{y}{x} \cdot -2c$

4) $(2a - 5b + c - 8) \cdot -3$

5) $(6ab - 5bc - 7 + 9x) \cdot -3ax$

6) $(2a - 3b) \times (5a - 7b)$

7) $(3x + 4y) \times (3x - 4y)$

8) $(-3m + 6) \times (-2 + m) \times \frac{4}{3}$

9) $(5a + 2b - 3c) \times (2a - 7b - 2c)$

10) $\left(-\frac{6a}{b} + \frac{3ac}{bd} - \frac{9d}{c}\right) \times \left(\frac{2a}{b} - \frac{bd}{ac} - \frac{c}{3d}\right)$

11) $-(a + 2b) \times -(5a - 3b) \times (2a - 4b)$.

d) Division.

1) $6a : -3a$, $-\frac{50ab}{3d} : -4ac$

2) $-\frac{3ac}{df} : \frac{5bc}{dg}$, $-\frac{7ax}{3m} : -\frac{2ay}{9mn}$

3) Ist es einerlei, ob man bei einem negativen Bruch das Zeichen — vor den Bruch, oder vor den Zähler, oder vor den Nenner setzt?

4) $(3a + 9b - 72) : -3$, $(-6a + 7ab - 8c) : -a$

5) $(4aa - 8ax + 4xx) : (a - x)$

6) $(8aaa - 12aab + 6abb - bbb) : (2a - b)$

7) $(27aa - 12nn) : (3a - 2n)$

8) $(27 - 8xxx) : (3 - 2x)$

9) $(4aa - 4ab + 4ac + bb - 2bc + cc) : (2a - b + c)$

10) $\left(\frac{aa}{bb} - \frac{3a}{2b} + \frac{9}{16}\right) : \left(\frac{a}{2b} - \frac{3}{8}\right)$

11) $(1 + x) : (1 - x)$

12) Prüfet die Resultate der Aufgaben 1, 2 und 3 dadurch, daß aus Quotient und Divisor der Dividend gebildet wird.

13) Setzet in 1, 2 und 3 für die Buchstaben beliebige Zahlenwerthe, z. B. $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 5$, $f = 2$, $g = 7$, $m = 9$, $n = 10$, $x = 8$, $y = 5$ und prüfet die Quotienten!

14) Theilet in den Aufgaben 5, 7 und 9 mit dem erhaltenen Quotienten den Dividenden! Prüfet die Quotienten der Beispiele 6, 8 und 10 durch Multiplication des Quotienten mit dem Divisor!

Zweiter Abschnitt.

Rechnung mit Potenzen.

§. 1. Erklärungen.

Wenn ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren besteht, so kann man auch der Abkürzung wegen nur einen Faktor anschreiben und neben diesen die Zahl der Faktoren setzen. Z. B.

$aa = a^2$, $3 . 3 . 3 . 3 = 3^4$, $b . b . b = b^3$.

Ein solches Produkt gleicher Faktoren nennt man Potenz (oder Würde oder auch Dignität), den gleichen Faktor aber Wurzel, Grundgröße oder Basis, und die Zahl, welche die Anzahl der gleichen Faktoren angibt: Exponent. Z. B. $a^4 = aaaa$ ist eine Potenz und wird ausgesprochen: a in der 4ten oder auf der 4ten

(nämlich Potenz), oder auch a hoch 4; a ist die Wurzel und 4 der Exponent. Die erste Potenz (a^1) wird ohne Exponent geschrieben (a), die 2te nennt man auch das Quadrat, die 3te den Cubus und die 4te das Biquadrat.

Diese Bezeichnung der Potenzen wurde zuerst von Cartesius (Descartes) in der Mitte des 17ten Jahrhunderts gebraucht; während die Bezeichnung der Größen durch Buchstaben zuerst von Franz Vieta (einem Franzosen) im Jahre 1590 angewendet wurde, er gebrauchte die großen Buchstaben des lateinischen Alphabets; Harriot (ein Engländer) führte die kleinen Buchstaben ein 1631.

§. 2. Addition und Subtraction.

Nur gleiche Potenzen können wirklich vereinigt werden, ungleiche setzt man mit den zugehörigen Zeichen neben einander. Z. B.

1) $2^3 + 2^3 + 2^3 = 3 . 2^3$, 2) $a^2 + 2a^2 = 3a^2$, denn:

$$a^2 + 2a^2 = aa + 2aa = 3aa = 3a^2.$$

3) $7b^2 + 3b^2 - 2b^2 = 8b^2$, $5b^2 + 3b^3 - 3b^2 = 2b^2 + 3b^3$.

4) $\left.\begin{array}{l} 6x^2 + 4y^2 + 3z^2 \\ 2x^2 - 5y^2 + z^2 \end{array}\right\}$ addirt. $\overline{8x^2 - y^2 + 4z^2}$

5) $\left\{\begin{array}{l} -3a^2 + 5m^2 + 16n^2 \\ -4a^2 + 5m^2 - 8n^2 \end{array}\right.$ $\overline{-7a^2 \qquad + 8n^2}$.

6) $\left.\begin{array}{l} 3a^2 + 4b^2 - 8c^3 + d^4 - 7f^2 + 3y^5 \\ 5a^2 + 4b^2 - 7c^3 + d^2 - 9f^2 + 3y^5 \\ -9a^2 + 2b^2 + 15c^3 - d^4 + 15f^2 - 2z^2 \end{array}\right\}$ addirt.

$\overline{-a^2 + 10b^2 \qquad + d^2 - f^2 + 6y^5 - 2z^2}$

7) $\left.\begin{array}{l} 5a^2 + 3a^3b - 4a^2c + 2ac^2 \\ \mp 3a^2 \pm 3a^3b \pm 4ac^3 \pm 9ac^2 \pm f^4 \end{array}\right\}$ subth.

$\overline{8a^2 - 4a^2c - 4ac^3 - 7ac^2 - f^4}$

§. 3. Beispiele über die Addition und Subtraction.

1) $4a^2 + 6b^2 + 5a^2 - 3a^2 - 2b^2 - 8a^2$

2) $4{,}2b^2 + 3{,}8b^2 - 5{,}3b^2 + 7{,}9b^2$

3) $\frac{5}{8} a^3x + \frac{3}{4} a^3x - \frac{2}{3} a^2x^2 + \frac{5}{6} a^2x^2$

4) $9{,}5x^3 - 7{,}8x^4 - 9{,}3x^2 + 4{,}8x^4 - 7{,}3x^3 - 0{,}01x^2$

5) $\left.\begin{array}{l} 2a + 3b^2 - 4c^2 \\ 3a + 9b^2 + 8c^2 \end{array}\right\}$ addiren und subtrahiren!

6) $\left.\begin{array}{l} 3^8 + 2^5 - 4 . 3^7 \\ 3^8 - 2^5 - 8 . 3^7 + 4^3 \end{array}\right\}$ addiren und subtrahiren!

7) $\left.\begin{array}{l} 3a^2b^4 + 9a^3b^2 + 7a^4b^4 - 8c^5 \\ -4a^2b^4 - 7a^3b^2 - 9a^2b^4 + 4c^5 \\ a^2b^4 - 3a^3b^2 - 3a^4b^4 - 12c^5 \end{array}\right\}$ addiren!

8) $\left.\begin{array}{l} 4\frac{1}{2} a^2 + 7\frac{1}{3} b^2 - 9\frac{2}{5} c^2 \\ 13\frac{1}{8} a^2 - 4\frac{2}{3} b^2 + 5\frac{3}{4} c^2 \end{array}\right\}$ addiren und subtrahiren!

§. 4. Multiplication.

Wenn die Grundgrößen gleich sind, so werden die Exponenten addirt, denn:

$$a^3 \times a^2 = aaa \times aa = a^5 = a^{3+2}$$

$$a^4 \times a = aaaa \times a = a^5 = a^{4+1}$$

Oder allgemein $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$2a^3b \times a^4 = 2a^7b$$

$$-a^5b^2 \times -3a^2b^4 = 3a^7b^6$$

$$2a^5c^2dx^2 \times -4a^2cd^3x^2 = -8a^7c^3d^4x^4$$

$$(3a^2 + 4ab^3 - 9b^4) \times 2a^2b = 6a^4b + 8a^3b^4 - 18a^2b^5$$

$$\left(\frac{3}{4} m^3 - \frac{2}{3} n^2 + 9\frac{1}{2} x^4\right) \times -\frac{3}{8} m^2x =$$

$$= -\frac{9}{32} m^5x + \frac{1}{4} m^2n^2x - \frac{57}{16} m^2x^5.$$

$$(a^3 + 2b^2) \times (2a^4 - 3ab^2)$$

$$\begin{array}{l} a^3 + 2b^2 \\ \underline{2a^4 - 3ab^2} \\ 2a^7 + 4a^4b^2 \\ \underline{\qquad -3a^4b^2 - 6ab^4} \\ 2a^7 + a^4b^2 - 6ab^4. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a^m - \frac{2}{3} a^{m-1} b^n \\ -\frac{3}{4} a^n - \frac{3}{2} a\, b^{2n} \end{array}\right\} \text{multip.}$$

$$-\frac{3}{2} a^{m+n} + \frac{1}{2} a^{m+n-1} b^n - 3a^{m+1} b^{2n} + a^m b^{3n}.$$

§. 5. Aufgaben über die Multiplication.

1) $a^2 \times 2ax$, $a^3 \times -3ab^4$, $2a^2b^2 \times -3a^3b^4$

2) $-3a^4 \times -4a^3 \times -\frac{7}{8} a^5$.

3) $\frac{2a^2}{3} \times \frac{3a^2}{2} \times -\frac{5a^3}{6} \times -\frac{2a^4}{15}$

4) $-\frac{2}{3} x^m c \times -\frac{3ay^3}{4x^{3m}} \times -\frac{5a^4x^{2m}}{6b^4c^2}$

5) $(-a^4 - 2a^3b^2 + 3a^3b^4) \times -5a^2b^2$

6) $(0,1x^2 + 0,7y^2) \times (10x^2 + 70y^2)$

7) $(a^2 + b^2 + c^2) \times (a^2 + b^2 - c^2)$

8) $(3a^3b^2 - 2c^2d + 4m^2n^2) \times (2am^2 - 3n^2)$

9) $(4a^4x^2 - 6a^2x^4 + 5x^6) \times (2a^3x + 3ax^3)$

10) $(25a^4 - 20a^3b^2 + 4a^2b^4) \times (25a^2b + 20ab^3 + 4b^5)$

11) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{6ac^2}{5bd} + \frac{9c^4}{25d^2}\right) \times \left(\frac{2a^2}{3b^2} - \frac{2ac^2}{5bd}\right)$

12) $(8m^3 - 36m^4n + 54m^5n^2 - 27m^6n^3) \times (4mn - 12m^2n^2 + 9m^3n^3)$

13) $(2x^2 - 4a^2) \times -(2x^5 + 8a^4x) \times (2a^2 + x^2)$

§. 6. Division.

a) Bei Potenzen mit gleichen Grundgrößen wird der Exponent des Divisors von dem des Dividendus abgezogen; denn:

$$a^5 : a^2 = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3 = a^{5-2}$$

$$a^4 : a^3 = \frac{aaaa}{aaa} = a = a^{4-3}$$

Oder allgemein: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

b) Wird eine Potenz durch sich selbst getheilt, z. B. $a^3 : a^3$, so ist der Quotient $= 1$; da aber auch $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$ ist; so muß auch $a^0 = 1$ sein, d. h.

Jede Größe in der nullten Potenz ist $= 1$.

c) Wenn eine Potenz durch eine gleichnamige höhere getheilt wird, so erhält man entweder einen Bruch oder eine Potenz mit negativem Exponenten.

Z. B. $a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$ (wenn Zähler und Nenner mit a^2 getheilt wird) oder:

$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$, daher ist:

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, ebenso allgemein: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Man kann daher jede Potenz mit negativem Exponenten als einen Bruch schreiben, dessen Zähler $= 1$ und dessen Nenner $=$ der Potenz mit positivem Exponenten ist, und umgekehrt; z. B.

$$\frac{1}{a^4} = a^{-4}, \text{ und } x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

d) Man kann in jedem Bruch jede Größe aus dem Zähler in den Nenner versetzen und umgekehrt; wenn man das Zeichen des Exponenten verändert. Z. B.

$$\frac{a^3}{b^{-2}} = \frac{a^3}{b^{-2}} \cdot \frac{b^2}{b^2} = \frac{a^3b^2}{b^0} = \frac{a^3b^2}{1} = a^3b^2,$$

Zähler und Nenner mit b^2 multiplicirt!

$$\frac{a^{-4}}{b} = \frac{a^{-4}}{b} \cdot \frac{a^4}{a^4} = \frac{a^0}{a^4 b} = \frac{1}{a^4 b}$$

$$\frac{a^{-2}}{x^{-3}} = \frac{a^{-2}}{x^{-3}} \cdot \frac{a^2 x^3}{a^2 x^3} = \frac{a^0 x^3}{a^2 x^0} = \frac{x^3}{a^2}$$

$$\frac{2a^2b^{-2}c}{3d^2f^{-4}} = \frac{2a^2cf^4}{3b^2d^2} \text{ oder } = \frac{2}{3} a^2b^{-2}cd^{-2}f^4.$$

e) Aufgaben über die Division.

1) $a^2 : a = a$, $2a^4 : a^2 = 2a^2$, $4a^3b^2 : -2a^2b^2 = -2a$

2) $-6a^5b^3c : -3a^4b^6 = 2ab^{-3}c = \frac{2ac}{b^3}$

3) $-12a^4b^{-3}c : -3a^2b^{-6} = 4a^2b^3c$

4) $\frac{16a^5b^5}{15d^2x} : -\frac{4a^2}{5d} = -\frac{16a^5b^5}{15d^2x} \cdot \frac{5d}{4a^2} = -\frac{4a^3b^5}{3dx}$

5) $(4a^3 + 6a^2b) : 2a^2 = 2a + 3b$

6) $(a^2 + 6ab^2 + 9b^4) : (a + 3b^2) = a + 3b^2$

$$\begin{array}{l} a^2 + 3ab^2 \\ - \quad - \\ \hline \quad 3ab^2 + 9b^4 \\ \quad 3ab^2 + 9b^4 \\ \quad - \quad\; - \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

7) $(16m^4 - n^4) : (2m - n) = 8m^3 + 4m^2n + 2mn^2 + n^3$

$$\begin{array}{l} 16m^4 - 8m^3n \\ - \quad\; + \\ \hline \quad 8m^3n - n^4 \\ \quad 8m^3n - 4m^2n^2 \\ \quad - \quad\; + \\ \hline \qquad 4m^2n^2 - n^4 \\ \qquad 4m^2n^2 - 2mn^3 \\ \qquad - \quad\; + \\ \hline \qquad\quad 2mn^3 - n^4 \\ \qquad\quad 2mn^3 - n^4 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

8) $(4a^5 - 4a^3b + ab^2 - ac^6) : (-b + 2a^2 - c^3)$

Man ordne zuerst den Divisor, so folgt als Quotient:

$$2a^3 - ab + ac^3.$$

9) $(a^2 + b^2) : (a + b) = a - b + \frac{2b^2}{a} - \frac{2b^3}{a^2} \dots$

$a^2 + ab$

$- \quad -$

$- ab + b^2$

$\mp ab \mp b^2$

$+ 2b^2$

$2b^2 + \frac{2b^3}{a}$

$- \quad -$

$- \frac{2b^3}{a}$ u. s. w.

§. 7. Beispiele über die Division.

1) Schreibet a^{-4}, a^2b^{-5}, $\frac{a^{-3}}{b^4}$, $\frac{a^{-5}}{a^{-7}}$ ohne negative Exponenten!

2) Verwandelt folgende Brüche in ungebrochene Größen!

$\frac{a^4}{b^{-5}}$, $\frac{3^5}{4^7}$, $\frac{a^2}{b^{-8}x^9}$, $\frac{1}{2^3d^7f^{-8}g}$

3) $1{,}5a^4b^3 : 0{,}6ab^3$, $57a^3c^2 : -19a^5c$

4) $-\frac{72a^5x^2}{5y^3} : -3{,}6a^2x$, $-60\frac{3}{4} \cdot \frac{x^4y^5}{z^6} : -10\frac{1}{8} \cdot \frac{ax^3}{z^4}$

5) $\frac{2a^mc^pd^{p+1}}{9b^{m+1}} : -\frac{4a^mc^3d}{3b^{-m}f^q}$

6) $(16a^5b^4 + 30a^4b^2 - 52a^2b^5) : -2a^2b^2$

7) $\left(\frac{24a^{-3}}{7b^4} + 20\frac{3}{10} - \frac{3a^{-5}}{14b^2}\right) : -\frac{4a^{-2}}{7b^3}$

8) $(9a^3 + 6a^2 + a) : (3a + 1)$

9) $(100a^4 + 120a^3b^2 + 36a^2b^4) : (20a + 12b^2)$

10) $(25a^4 - 36x^4) : (5a^2 + 6x^2)$

11) $(64a^{-6} - 8c^9d^3) : 2a^{-2} - c^3d)$

12) $(-1 + 16m^8) : (2m^2 + 1)$

13) $(3d^4f^{11} - 8d^7f^7 - \frac{51}{2}d^{10}f^5 + \frac{5}{4}d^{10}f^3 + \frac{17}{4}d^{13}f) :$

$: (2df^6 - 5d^4f^2 - 17d^7)$

14) $(a^6 + 12a^5b + 60a^4b^2 + 160a^3b^3 + 240a^2b^4 + 192ab^5 + 64b^6) :$

$: (4b^2 + 4ab + a^2)$

Ordnet zuerst!

15) $\left(\frac{a^3}{2m^6} - \frac{2c^3x^4}{a^{-1}m^8} + \frac{2c^6x^8}{am^{10}}\right) : \left(\frac{3a^2x}{m^3} - \frac{6c^3}{m^5x^{-5}}\right)$

16) $(a^2 + 14a^3b + 49a^4b^2 - 25a^2c^4) : \left(\frac{a}{c} + \frac{7a^2b}{c} - 5ac\right)$

17) $(a^2 + x^2) : (a^2 - x^2)$
18) $(a^2 + x^2) : (a - x)$.

§. 8. Potenzerhebung.

a) Eintheiliger Größen.

Wenn eine Potenz mit sich selbst multiplicirt werden soll, so entsteht die Potenz einer Potenz. Man multiplicirt dann die Exponenten, denn:

$$(a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a^{12} = a^{4.3}$$

$$(a^{-3})^2 = a^{-3} . a^{-3} = a^{-6} = a^{-3.2};$$

oder allgemein: $(a^m)^n = a^{mn}$ und

$$\left[(a^m)^n\right]^p = (a^{mn})^p = a^{mnp}$$

Jede gerade Potenz einer negativen Größe wird positiv, jede ungerade aber negativ; dieser Satz folgt aus I. §. 13, *c*.

$$(-2^5)^2 = 2^{10}, \quad (-8a^2b^3)^3 = -8^3a^6b^9, \text{ denn:}$$

$$(-8a^2b^3)^3 = -8a^2b^3 \times -8a^2b^3 \times -8a^2b^3 = -8^3a^6b^9.$$

Bei einem Produkte wird also jeder Faktor potenzirt. Da ferner $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4}$ ist, so ist die Potenz eines Bruches = der Potenz des Zählers, getheilt durch die Potenz des Nenners.

Beispiele.

$$(-a^2b^4)^3 = -a^6b^{12}$$

$$\left(-\frac{3a^3b^{-4}}{2c^{-5}d}\right)^2 = \frac{9a^6b^{-8}}{4c^{-10}d^2} = \frac{9a^6c^{10}}{4b^8d^2}$$

$$\left((a^2b^3)^5\right)^2 = (a^2b^3)^{10} = a^{20}b^{30}$$

$$\left((2^4 . 3^{-3})^{-1}\right)^4 = (2^4 . 3^{-3})^{-4} = 2^{-16}3^{12} = \frac{3^{12}}{2^{16}}$$

$$\left(\left(-\frac{a^{-3}}{b^{-4}}\right)^{-2}\right)^{-4} = \left(-\frac{a^{-3}}{b^{-4}}\right)^8 = \frac{a^{-24}}{b^{-32}} = \frac{b^{32}}{a^{24}}$$

b) Mehrtheiliger Größen.

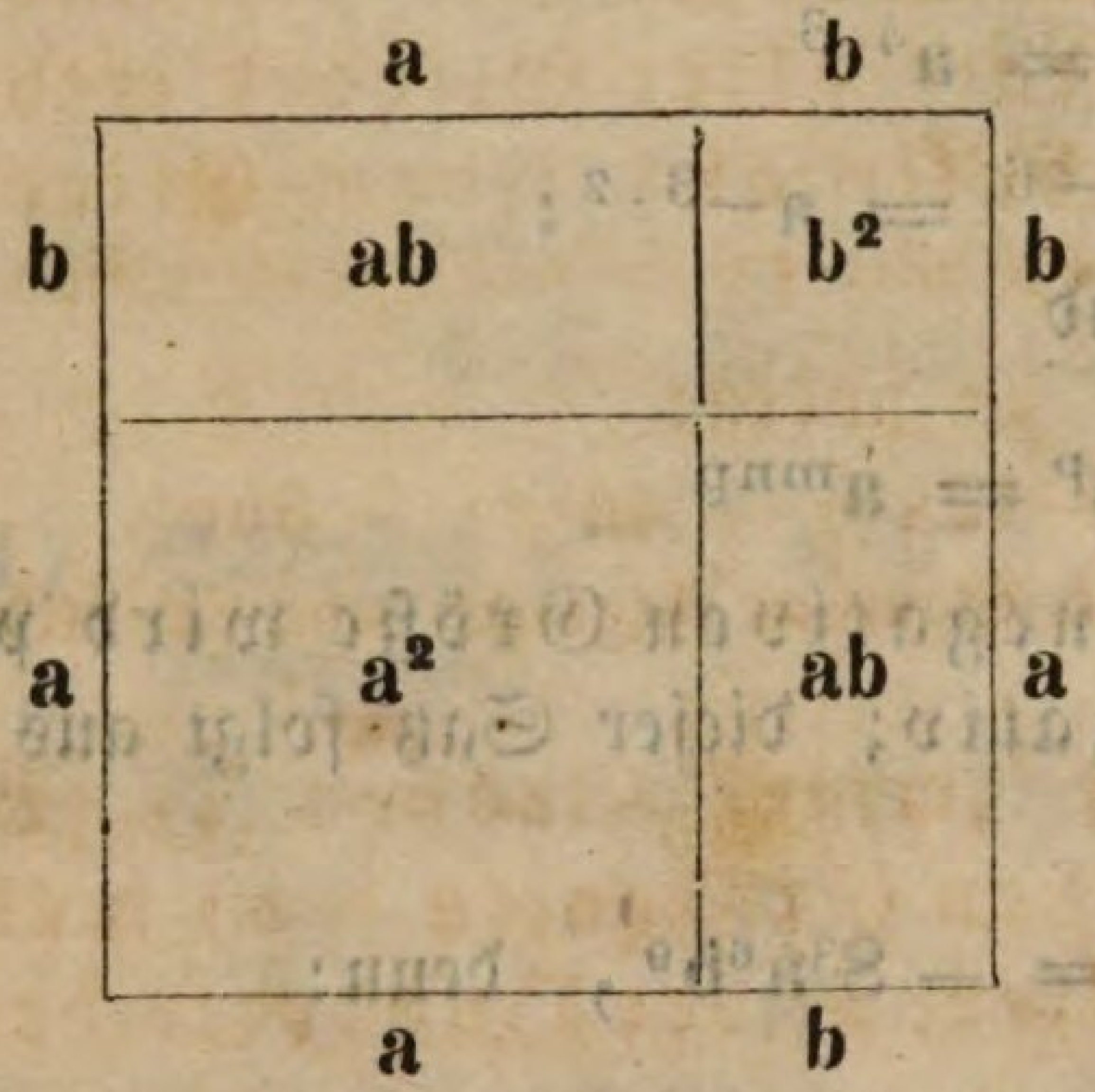
1) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$.

2) $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$.

Aus diesen beiden Resultaten ergibt sich folgender Satz über die Quadraterhebung zweitheiliger Größen:

Das Quadrat einer zweitheiligen Größe (eines Binomiums) besteht aus dem Quadrat des ersten Theils, dem doppelten Produkt des ersten und zweiten und aus dem Quadrat des zweiten Theiles.

Geometrisch läßt sich dieser Satz ebenfalls ableiten, wozu folgende Figur dient:



$(a + b)^2 =$ dem ganzen Quadrat

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

(Siehe Geometrie §. 79.)

Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich nun jede zweitheilige Größe quadriren z. B.

$(a^2 + 2b)^2 = (a^2)^2 + 2 \,.\, a^2 \,.\, 2b + (2b)^2$, oder

$= a^4 + 4a^2b + 4b^2$.

$(5a^3 - 7b^2)^2 = (5a^3)^2 + 2 \,.\, 5a^3 \,.\, (-7b^2) + (-7b^2)^2 =$

$= 25a^6 - 70a^3b^2 + 49b^4$.

$$\left(\frac{3a^2y}{5x} + \frac{5b^3x}{4y}\right)^2 = \left(\frac{3a^2y}{5x}\right)^2 + 2\left(\frac{3a^2y}{5x}\right) \cdot \left(\frac{5b^3x}{4y}\right) + \left(\frac{5b^3x}{4y}\right)^2$$

$$= \frac{9a^4y^2}{25x^2} + \frac{3}{2}\, a^2b^3 + \frac{25b^6x^2}{16y^2}.$$

Auch auf die Quadratur der Zahlen ist dieser Satz anwendbar, namentlich beim Kopfrechnen.

Z. B. 52^2 setze $= (50 + 2)^2 = 50^2 + 2 \,.\, 50 \,.\, 2 + 2^2$

$= 2500 + 200 + 4 = 2704$.

$197^2 = (200 - 3)^2 = 40000 - 1200 + 9 = 38809$.

$1010^2 = (1000 + 10)^2 = 1000000$

20000

100

1020100.

Fernere Anwendungen dieses Satzes folgen im dritten Abschnitte.

3) Besteht eine Größe, welche in die zweite Potenz erhoben werden soll, aus mehr als zwei Gliedern; so kann man dieselbe in 2 Theile zerlegen, und dann den vorhergehenden Satz anwenden. Z. B.

$$(a+b+c+d)^2 = [(a+b)+(c+d)]^2 =$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + 2ad +$$
$$+ 2bd + c^2 + 2cd + d^2.$$

Oder, wenn man die Glieder auf folgende Weise setzt:

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Hieraus folgt:

das Quadrat jeder mehrtheiligen Größe (jedes Polynoms) ist gleich der Summe der Quadrate aller Glieder mehr der Summe der doppelten Produkte aus jedem Gliede in alle einzelnen folgenden.

Es sey z. B. $(2a^2 + 3b - c^3)^2$ zu finden:

Man erhält: $4a^4 + 9b^2 + c^6 + 12a^2b - 4a^2c^3 - 6bc^3$.

Prüfet dieses Resultat dadurch, daß das gegebene Aggregat mit sich selbst multiplicirt wird.

4) Wenn man die Summe zweier Größen (z. B. $a+b$) mit der Differenz derselben Größen $(a-b)$ multiplicirt, so erhält man die Differenz der Quadrate der 2 Größen $(a^2 - b^2)$. Denn:

$$(a+b) \times (a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

z. B. $(2a + 5b) . (2a - 5b) = 4a^2 - 25b^2$

$(3a^2 + 4b^3) . (3a^2 - 4b^3) = 9a^4 - 16b^6$.

Dieser Satz läßt sich auch auf Größen anwenden, welche mehr als zwei Glieder haben. z. B.

$(a^3 + 2b^2 + 3c) . (a^3 + 2b^2 - 3c)$.

Betrachte $a^3 + 2b^2$ als ersten Theil und $3c$ als zweiten, so folgt:

$(a^3 + 2b^2)^2 - (3c)^2 = a^6 + 4a^3b^2 + 4b^4 - 9c^2$.

Prüfet dieses Resultat durch Multiplication der 2 Faktoren!

Dieser Satz läßt sich auch in manchen Fällen beim Kopfrechnen anwenden, wenn zwei Zahlen multiplicirt werden sollen; z. B.

71×69 setze $(70 + 1) . (70 - 1)$

so folgt $70^2 - 1 = 4900 - 1 = 4899$.

$133 . 127 = (130 + 3)(130 - 3) = 16900 - 9 = 16891$.

Weitere Anwendungen folgen in der Lehre von der Faktorenzerlegung und in der Wurzelrechnung.

5) Die dritte Potenz einer zweitheiligen Größe besteht aus dem Cubus des ersten Theiles, dem 3fachen Produkte des Quadrats des ersten in dem 2ten, dem 3fachen Produkte des ersten in das Quadrat des 2ten und aus dem Cubus des zweiten Theiles.

Beweis. $(a+b)^3 = (a+b)^2 \times (a+b)$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ebenso findet man $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
Es sei nun z. B. $(3a^2 + 5b)^3$ zu finden, so erhält man:

$$(3a^2)^3 + 3(3a^2)^2 \,.\, 5b + 3(3a^2) \,.\, (5b)^2 + (5b)^3 =$$
$$= 27a^6 + 135a^4b + 225a^2b^2 + 125b^3.$$

Obiger Satz läßt sich auch durch einen Würfel, dessen Seite $= a + b$ genommen wird, geometrisch nachweisen. (Siehe Stereometrie §. 49.)

Auch auf die Erhebung von Zahlen in die 3te Potenz kann dieser Satz angewendet werden; z. B.

$$81^3 = (80+1)^3 = 80^3 + 3 \,.\, 80^2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 80 \,.\, 1^2 + 1^3$$
$$= 512000 + 19200 + 240 + 1 = 531441.$$

$$598^3 = (600 - 2)^3 = 216000000 - 2160000$$
$$+ 7200 \qquad - 8$$
$$216007200 - 2160008 = 213847192.$$

(Prüfet dieses Resultat durch Multiplication!)

Es sei ferner $(a + b + c)^3$ zu bilden, so betrachte $a + b$ als ersten und c als 2ten Theil; man erhält dann:

$$(a + b)^3 + 3(a + b)^2 \,.\, c + 3(a + b)c^2 + c^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3.$$

Weitere Anwendungen siehe Abschnitt III.

6) Die Erhebung einer mehrtheiligen Größe in höhere Potenzen als die 3te läßt sich (ohne Kenntniß des sogenannten binomischen und polynomischen Satzes) nur durch successive Multiplication bewerkstelligen; wobei man jedoch die für die 2te und 3te Potenz gegebenen Regeln anwenden kann.

z. B. $(a + b)^4 = \left((a + b)^2\right)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)^2 =$
$$= a^4 + 4a^2b^2 + b^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3$$
oder $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, wenn man die Glieder nach Potenzen von a ordnet.

$(a + b)^5 = (a + b)^3 \times (a + b)^2$ u. s. w.

$(a + b)^6 = \left((a + b)^3\right)^2$ u. s. w. oder $= \left((a + b)^2\right)^3$ u. s. w.

§. 9. Aufgaben über Potenzerhebungen.

1) $(a^3)^2$, $(2^4)^3$, $(3^2)^{-4}$, $(-4^3)^2$, $(-a^2)^6$

2) $(2x^3)^{-4}$, $\left(\frac{3a^3}{b^4}\right)^{-1}$, $\left(\frac{5a^2x^{-3}}{4b^{-4}cd^3}\right)^{-2}$.

Schreibet alle Resultate in Nro. 2 ohne negative Exponenten!

3) $\left[(a^{-3})^4\right]^{-1}$, $\left[\left(\frac{2ab^3}{3g^4}\right)^2\right]^{-5}$, $\left[\left(-\frac{ab^{-3}c^4}{d^8g^{-9}}\right)^2\right]^{-3}$

4) $(2a+b)^2$, $(2a-3b)^2$, $(4a^{-2}-3a^2)^2$

5) $(5a^3+7b^2)^2$, $\left(9a^4f^3-\frac{10}{3}\cdot\frac{b^3c}{a^4}\right)^2$, $\left(-\frac{4a^3}{bc^2}-\frac{9b^2}{d}\right)^2$

6) 71^2, 103^2, 499^2, $\left(\frac{702}{803}\right)^2$, $\left(-\frac{998}{1007}\right)^2$.

(Als Summen oder Differenzen zu behandeln!)

7) $(3a+2b-4c)^2$, $(2a+b+3c^2-d^3)^2$

8) $(7a^{-3}+5b^3)\times(7a^{-3}-5b^3)$

9) $(2a+3b^2-c)\times(2a+3b^2+c)$

10) $\left(3a+\frac{2b}{3}\right)^3$, $\left(2a^2b-\frac{3c}{2b}\right)^3$, $\left(\frac{4a^4}{9b^3}+\frac{3b^3}{2a^2}\right)^3$

11) $(-31)^3$, 403^3, 1998^3, $\left(\frac{603}{799}\right)^3$

(Als Summen oder Differenzen zu behandeln!)

12) $(a+b)^6=\left((a+b)^3\right)^2$ auszurechnen.

13) $(a-b)^5=(a-b)^3\times(a-b)^2$ auszurechnen.

§. 10. Von der Zerlegung in Faktoren und deren Anwendung.

a) Die Aufsuchung der Faktoren eines gegebenen Produkts nennt man Faktorenzerlegung.

Bei einfachen Buchstabenausdrücken sind die Faktoren schon gegeben; z. B. $a^3b^2 = a^3 \cdot b^2 = a^2 \cdot ab^2 = a \cdot a^2 \cdot b^2$ u. s. w.

b) Wenn die Faktoren einer mehrtheiligen Größe gefunden werden sollen, so sucht man eine Größe, welche in allen Gliedern vorkommt, diese ist dann der eine Faktor; und wenn man mit ihm in die gegebenen Größen theilt, so ergibt sich der andere Faktor.

Z. B. $3a^3b+6a^2bx+9a^2b = 3a^2b(a+2x+3)$

$$5a^4b^2-\frac{15a^3b^4}{c^2}+25a^5b^3 = 5a^3b^2\left(a-\frac{3b^2}{c^2}+5a^2b\right)$$

c) Die Aggregate haben häufig eine solche Form, daß man nicht aus allen Gliedern einen Faktor heraussetzen kann; man sucht dann durch theilweise Zerlegung mehrere Produkte zu erhalten, wodurch dann in manchen Fällen ein gemeinschaftlicher Faktor dieser Produkte erscheint. Z. B.

$$a^2+ab+ac^2+bc^2.$$

Setzt man aus dem 1ten und 2ten Gliede a und aus dem 3ten und 4ten c^2 als Faktor, so folgt:

$$a(a+b)+c^2(a+b)=(a+b)(a+c^2).$$

Oder aus dem 1ten und 3ten a und aus dem 2ten und 4ten b als Faktor genommen, gibt: $a(a+c^2) + b(a+c^2)$ u. s. w.

d) Bei Aggregaten von 3 Gliedern gelangt man oft dadurch zum Zweck, daß man das 2te Glied (nachdem der Ausdruck geordnet ist) in die Summe zweier Größen zerlegt, wovon die eine mit dem ersten und die andere mit dem 3ten Gliede einen gemeinschaftlichen Faktor hat. Z. B.

$$a^2+3ab+2b^2 = a^2+ab+2ab+2b^2 =$$
$$= a(a+b)+2b(a+b) = (a+b)(a+2b)$$

e) In vielen Fällen lassen sich die Ausdrücke durch Anwendung der Sätze **II.** §. 8. b. zerlegen, aus §. 8. b. 1 und 2 folgt nämlich:

$$(a^2 \pm 2ab + b^2) = (a \pm b)^2, \text{ und aus §. 8 b. 4:}$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Wenn daher bei einer geordneten 3theiligen Größe die erste und 3te Quadrate sind und die mittlere = dem doppelten Produkte aus den ersten Potenzen ist; so ist die Größe ein vollständiges Quadrat und kann in 2 gleiche Faktoren zerlegt werden.

Besteht aber eine Größe aus der Differenz zweier Quadrate, so läßt sie sich in das Produkt der Summe und Differenz der ersten Potenzen zerlegen.

Z. B. $a^2+4ab^2+4b^4$, hier ist $a^2 = (a)^2$, $4b^4 = (2b^2)^2$ und $4ab^2 = 2.a.(2b^2)$, daher ist der Ausdruck das vollständige Quadrat von

$a+2b^2$, er ist daher $= (a+2b^2).(a+2b^2)$

$$a^2b^2 - x^4 = (ab)^2 - (x^2)^2 = (ab+x^2)(ab-x^2).$$

In der Lehre von den Gleichungen wird noch eine andere Methode gezeigt werden, wie solche Faktoren zu finden sind.

f) Die Zerlegung in Faktoren wird namentlich zur Abkürzung der Brüche angewendet, man zerlegt Zähler und Nenner in Faktoren und läßt dann die gleichen Faktoren weg; hierbei kann man auch die in **I.** §. 11 gegebene Methode anwenden, welche jedoch häufig auf weitläufige Rechnungen führt.

Es sollen nun diese verschiedenen Arten von Zerlegungen an einigen Brüchen gezeigt werden.

1) $$\frac{a^2+ab^2}{ac^2+ad^2} = \frac{a(a+b^2)}{a(c^2+d^2)} = \frac{a+b^2}{c^2+d^2}$$

2) $$\frac{a^3+a^2+a^2b}{ac^2+c^2+bc^2} = \frac{a^2(a+1+b)}{c^2(a+1+b)} = \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

3) $$\frac{4a^2b^3+2b^4c-2b^3c^2}{6a^3+3abc-3ac^2} = \frac{2b^3(2a^2+bc-c^2)}{3a(2a^2+bc-c^2)} = \frac{2b^3}{3a}$$

4) $$\frac{a^2-b^2}{ab+b^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{b.(a+b)} = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1$$

5) $$\frac{2ab+2b^2+ax^2+bx^2}{x^4-4b^2} = \frac{2b(a+b)+x^2(a+b)}{(x^2+2b)(x^2-2b)} =$$
$$= \frac{(a+b)(2b+x^2)}{(x^2+2b)(x^2-2b)} = \frac{a+b}{x^2-2b}$$

6) $$\frac{1+2x+x^2}{x^2+5x+4}.$$

Erste Auflösung.

$1+2x+x^2 = (1+x)^2$, $x^2+5x+4 = x^2+x+4x+4$ oder $= x(x+1)+4(x+1) = (x+1)(x+4)$ mithin

$$\frac{1+2x+x^2}{x^2+5x+4} = \frac{(1+x)^2}{(x+1)(x+4)} = \frac{1+x}{x+4}$$

Zweite Auflösung.

Suche den gemeinschaftlichen Theiler! (Siehe I. §. 11.)

$$\overset{1}{\frown}\qquad\qquad \overset{x+1}{\frown}$$
$$(x^2+5x+4) : (x^2+2x+1) : (x+1) \text{ geht auf,}$$
$$\underline{x^2+2x+1}$$
Rest: $3x+3 = 3(x+1)$

daher ist $x+1$ der größte Theiler, und wenn nun Zähler und Nenner mit $x+1$ getheilt werden, so folgt: $\frac{x+1}{x+4}$.

7) $$\frac{a^2+8ab+16b^2}{a^2+6ab+8b^2}.$$

Erste Auflösung.

Der Zähler ist $= (a+4b)^2$, den Nenner zerlege man wie folgt: $a^2+2ab+4ab+8b^2 = a(a+2b)+4b(a+2b) = (a+2b)(a+4b)$, daher ist der Bruch $= \frac{(a+4b)^2}{(a+2b)(a+4b)} = \frac{a+4b}{a+2b}$.

Zweite Auflösung.

$$\overset{1}{\frown}$$
$$(a^2+8ab+16b^2) : (a^2+6ab+8b^2) : (a+4b) = a+2b$$
$$\underline{a^2+6ab+\ 8b^2} \qquad \underline{a^2+4ab}$$
Rest $= 2ab+8b^2 \qquad 2ab+8b^2$
$= 2b(a+4b) \qquad \underline{2ab+8b^2}$
$$0$$

$a+4b$ ist daher der Faktor u. s. w.

§. 11. Aufgaben über Faktorenzerlegung.

1) a^3b, a^2+a^2b, $3a^4+a^3b$, $4a^5x-8a^3x^2$

2) $a^4-a^3b+a^2x$, $3x^4-9x^5+18x^3+12x^3y$

3) $a^4 - 9a^2b^2$, $4a^2 - 25b^4x^2$

4) $a^2 + ac^2 + ab^2 + b^2c^2$, $x^2 + 6xy + 9y^2$

5) $a^3 - a^2x - 6ax^2$, $24a^3b - 24a^2b^2 + 6ab^3$.

Verkürzet folgende Brüche!

6) $\frac{ax + bx}{ac + bc}$, $\frac{5a^3b + 70a^3b^3}{3b + 42b^3}$

7) $\frac{a^2 + ax + bx + ab}{a^2 - x^2}$, $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2a^2 - 2b^2}$

8) $\frac{(a + b)^2 + (a + b)^3}{(a - b)(1 + a + b)}$, $\frac{a^2 + 9ab + 18b^2}{(a + 3b)^2}$

9) $\frac{a^2b + 4ab^2 + 3b^3}{2a^2 + 4ab + 2b^2}$, $\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)}{a(a + b)^2 - ac^2}$

Dritter Abschnitt.

Von der Ausziehung der Wurzeln.

§. 1. Erklärungen.

Nach Abschnitt **II.** nennt man die Größe, durch deren Multiplication mit sich selbst eine Potenz entsteht, die Basis oder Wurzel der Potenz; und das Verfahren, durch welches man zu einer gegebenen Potenz die Wurzel findet, heißt Wurzelausziehen.

Da nun z. B. $8^2 = 64$, $4^3 = 64$, und $2^6 = 64$ ist, so kann die Wurzel der Zahl 64 sowohl 8, als 4, als auch 2 sein.

Man nennt nun 8 die 2te, 4 die 3te und 2 die 6te Wurzel von 64 und bezeichnet das Wort Wurzel durch $\sqrt{}$ (r, Anfangsbuchstabe von radix, Wurzel) und die Zahl, welche angibt, die wievielte Wurzel gefunden werden soll, setzt man in das Zeichen.

Z. B. $\sqrt[2]{64} = 8$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[6]{64} = 2$.

Allgemein heißt also $\sqrt[n]{a}$: Man soll eine Größe finden, deren nte Potenz $= a$ ist.

Man nennt n den Wurzelexponenten, $\sqrt[n]{a}$ aber eine Wurzelgröße.

Die 2te Wurzel heißt auch Quadratwurzel und wird einfach durch $\sqrt{}$ bezeichnet (ohne 2); die 3te Wurzel nennt man auch Cubikwurzel.

§. 2. Quadratwurzeln aus Zahlen.

a) Die Quadrate der einzifferigen Zahlen sind:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 und **81**,

daher ist z. B. $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{81} = 9$.

Die Quadrate der einzifferigen Zahlen haben daher eine oder 2 Ziffern.

b) Für mehrzifferige Zahlen kann man allgemein nachweisen, daß ihre Quadrate entweder doppelt so viele Ziffern haben oder doppelt so viele weniger eine, als die Anzahl der Ziffern der Zahl beträgt.

Z. B. $10^2 = 100$, $100^2 = 10000$, daher liegen die Quadrate aller 2zifferigen Zahlen zwischen **100** und **10000**, d. h. sie haben 3 oder 4 Ziffern. $100^2 = 10000$ und $1000^2 = 1000000$, daher liegen die Quadrate aller 3zifferigen Zahlen zwischen **10000** und **1000000**, d. h. sie haben 5 oder 6 Ziffern u. s. w. Das Quadrat einer Zahl mit n Ziffern hat daher $2n - 1$ oder $2n$ Ziffern und die Quadratwurzel aus einer Zahl von $2n$ oder $(2n - 1)$ Ziffern hat n Ziffern.

Wenn man daher aus einer Zahl die Quadratwurzel ziehen will, so theilt man die Zahl von der rechten Seite gegen die linke in Classen zu je 2 Stellen ab, wobei jedoch die links übrig bleibende Classe auch nur eine Ziffer enthalten kann (nach §. 2 **b.**); die Zahl der Classen zeigt dann die Anzahl der Ziffern der zu findenden Quadratwurzel.

Nach **II.** §. 8 **b.** ist allgemein $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, daher auch: $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} = a + b$.

Die Größe $a + b$ läßt sich dadurch finden, daß man zuerst die Wurzel von a^2 nimmt (gibt a) und dann mit dem Doppelten der gefundenen Größe ($2a$) in den 2ten Theil der gegebenen Größe theilt (gibt $+ b$); da nun aber die Wurzel aufgehen muß, so wird nun sowohl $2a$ als b mit der 2ten Größe $+ b$ multiplicirt und abgezogen; daher:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} = a + b \\
\underline{a^2} \\
\quad + 2ab + b^2 : 2a + b \\
\quad \underline{+ 2ab + b^2} \\
\qquad 0.
\end{array}
$$

Es sei nun z. B. $\sqrt{961}$ zu finden, so denke man sich **961** in **900 + 61** zerlegt, dann ist nach dem Vorhergehenden:

$$\sqrt{(900+61)} = 30 + 1 = 31$$

$$a^2 = \underline{900} \qquad a \quad b$$

$$61 : 60 + 1 = 61$$

$$1 . 61 = 2ab + b^2 = \underline{61} \quad 2a + b$$

$$0$$

$$\sqrt{84|64} = \sqrt{(84|00+64)} = 90+2 = 92$$

$$a^2 = \underline{81|00} \qquad a \quad b$$

$$300+64 = 364 : 180+2 = 182$$

$$b(2a+b) = 2ab+b^2 = 2(183) \quad = \underline{364} \quad 2a \quad b$$

$$0.$$

Ferner $\sqrt{10|49\,76}$ muß 3 Ziffern haben:

$$\sqrt{(10|00|00 + 4976)} = 300 + 20 + 4 = 324$$

$$a^2 = \underline{9\,00\,00} \qquad a \quad b \quad c$$

$$10000 + 4976 = 14976 : 600 + 20 = 620$$

$$20 . 620 = 2ab + b^2 \quad = \underline{12400} \quad 2a \quad b$$

$$2576 : 2 . 320 \text{ oder } 640 + 4$$

$$2(a + b) + c$$

$$c[2(a+b)+c] = 2ac+2bc+c^2 = \underline{2576}$$

$$0$$

Man hat daher $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, oder das Quadrat von $(a + b + c)$ nach §. 8 b. 3 abgezogen.

Auf ähnliche Weise ist bei einer Zahl mit 7, 8 und mehr Ziffern zu verfahren.

Aus der Betrachtung der vorhergehenden Beispiele folgt, wenn man die Nullen wegläßt:

Man ziehe die Quadratwurzel aus der ersten Classe:

$(\sqrt{9|61} = 3\,.\,.,\ \sqrt{84|64} = 9\,.\,.,\ \sqrt{10|49|76} = 3\,.\,.)$

so erhält man die erste Ziffer der Wurzel.

Um die 2te Ziffer der Wurzel zu erhalten, setze man die 2te Classe zu dem von der ersten gebliebenen Reste und theile mit der doppelten ersten Ziffer der Wurzel (lasse aber die letzte Stelle der 2ten Classe weg), diese 2te Ziffer wird dann neben die doppelte erste gesetzt und das Ganze mit der 2ten Ziffer multiplicirt und abgezogen.

$$\sqrt{84|64} = 92$$

$$\underline{81}$$

$$36|4 : 182$$

$$\underline{364}$$

$$0$$

Die Auffindung der 3ten, 4ten u. s. w. Ziffer geschieht dadurch, daß man nun die 2 ersten Ziffern (als besondere Zahl) als ersten Theil betrachtet und hiezu auf gleiche Art wie bei der 2ten Ziffer die 3te sucht u. s. w.

$\sqrt{10|49|76} = 324$,

9
14(9 : 62
12 4
257(6 : 644
257 6
0.

$\sqrt{25|83|68|89} = 5083$

25
8(3 : 10
8 36(8 : 1008
8 06 4
30 48(9 : 10163
30 48 9
0.

c) Wenn die Wurzel nicht aufgeht, so kann man an den Rest 2 Nullen anhängen, wodurch derselbe zu Hunderteln gemacht wird, aus welchen dann eine weitere Ziffer der Wurzel und zwar Zehntel folgen, $\left(\text{denn } \frac{a}{10} \cdot \frac{a}{10} = \frac{a^2}{100}\right)$; an den neuen Rest setzt man wieder 2 Nullen, so erhält man 1000tel, deren Wurzel also 100tel geben $\left(\left(\frac{a}{100}\right)^2 = \frac{a^2}{10000}\right)$ u. s. w.

3. B. $\sqrt{6|03} = 24{,}556$

4
20(3 : 44, (geht nur 4mal, denn 45 . 5 wäre 225!)
176
270(0 : 485
242 5
27 50(0 : 4509
24 52 5
2 97 50(0 : 49106
2 94 63 6
2 86 4 u. s. w.

Da keine Quadratzahl in der letzten Ziffer 3, 7 oder 8 oder eine Null haben kann (wie aus den Quadraten der Zahlen 1 bis 9 zu ersehen ist), so kann auch die Wurzel aus solchen Zahlen, deren letzte Ziffer 3, 7, 8 oder eine Null ist, nicht aufgehen (wenn aber 2 Nullen am Ende stehen, so kann die Wurzel aufgehen).

Man nennt eine solche Wurzel, deren Werth nicht vollständig bestimmt werden kann, eine irrationale, im Gegensatz zur rationalen, worunter man eine solche versteht, deren Werth genau angegeben werden kann.

Die Zahl der Decimalstellen, welche man zu suchen hat, hängt dann von dem Grade der Genauigkeit ab, welche gefordert ist.

d) Soll die Quadratwurzel aus einem Decimalbruch gezogen werden, so theile man diesen vom Comma aus in Classen zu je 2

Stellen ab, denn $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$, $\left(\frac{1}{100}\right)^2 = \frac{1}{10000}$ u. s. w.; man muß daher aus 2 Stellen (oder Hunderteln) die Wurzel ziehen, um Zehntel zu erhalten u. s. w. Z. B.

$$\sqrt{0{,}39|87|6} = 0{,}6314,$$

```
 36
 387 : 123
 369
  1860 : 1261
  1261
   59900 : 12624
   50496
  u. s. w.
```

Hier muß in der letzten Classe eine Null angesetzt werden, wodurch der Werth des Bruches nicht geändert wird.

e) Aus dem Obigen ergibt sich auch, daß bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl mit einem angehängten Decimalbruch vom Comma aus nach beiden Seiten in 2stellige Classen abzutheilen ist. Z. B.

$$\sqrt{3|74{,}49|8} = 19{,}35\ldots$$

```
 1
 274 : 29
 261
  1349 : 383
  1149
   20080 : 3865
   19325
  u. s. w.
```

f) Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einem gemeinen Bruch kann auf folgende 3 Arten geschehen.

1) Man ziehe die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner und schreibe dann beide in Bruchform an.

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}, \text{ denn } \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{1{,}732\ldots}{3{,}316\ldots} = 0{,}522\ldots$$

2) Verwandle den Bruch in einen Decimalbruch und ziehe aus diesem die Quadratwurzel!

$$\sqrt{\frac{3}{11}} = \sqrt{0{,}272727\ldots} = 0{,}522\ldots$$

3) Man verwandle den Bruch in einen anderen, bei welchem die Wurzel aus dem Zähler oder dem Nenner aufgeht; man multi=

plicire daher im Allgemeinen Zähler und Nenner mit dem Zähler oder Nenner.

Z. B. $\sqrt{\frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{33}{11^2}} = \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11^2}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$ oder:

$$\sqrt{\frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{9}{33}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{33}} = \frac{3}{\sqrt{33}}:$$

(Die erste Art ist kürzer.)

$$\sqrt{\frac{23}{32}} = \sqrt{\frac{23 \cdot 2}{64}} = \frac{\sqrt{46}}{8}, \qquad \sqrt{\frac{5}{18}} = \sqrt{\frac{10}{36}} = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

Im Allgemeinen ist die 2te und 3te Auflösung kürzer als die erste.

g) Dieselben Methoden können auch bei gemischten Zahlen angewendet werden. Z. B.

$$\sqrt{5\frac{72}{191}} = \sqrt{\frac{927}{191}} = \frac{\sqrt{927}}{\sqrt{191}}$$

$$\sqrt{5\frac{72}{191}} = \sqrt{5{,}3769} \ldots.$$

$$\sqrt{5\frac{72}{191}} = \sqrt{\frac{927}{191}} = \sqrt{\frac{927 \cdot 191}{191^2}} = \frac{\sqrt{927 \cdot 191}}{191}.$$

h) Um die Richtigkeit einer Wurzel zu prüfen, erhebe man diese in das Quadrat und addire den Rest (wenn die Wurzel irrational ist); so muß die gegebene Zahl erscheinen.

§. 3. Aufgaben.

1) $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{4}{25}}$, $\sqrt{\frac{900}{49}}$, $\sqrt{360000}$.

2) $\sqrt{1521}$, $\sqrt{43681}$, $\sqrt{142884}$, $\sqrt{1285956}$.

3) $\sqrt{36966400}$, $\sqrt{3931{,}29}$, $\sqrt{387{,}656721}$.

4) $\sqrt{0{,}244036}$, $\sqrt{0{,}04511376}$, $\sqrt{0{,}00576048001}$.

5) $\sqrt{2}$. $\sqrt{314}$ und $\sqrt{2{,}7812}$ auf 5 Stellen.

6) $\sqrt{0{,}000712}$ und $\sqrt{0{,}00009998027}$ auf 6 Stellen.

7) $\sqrt{40024{,}0579}$ und $\sqrt{5486369{,}982}$ auf 4 Stellen.

8) $\sqrt{\frac{15}{16}}$, $\sqrt{3\frac{5}{81}}$ nach der ersten Art.

9) $\sqrt{\frac{34}{251}}$, $\sqrt{5\frac{26}{31}}$ nach der 2ten Art.

10) $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{14}{45}}$, und $\sqrt{8\frac{7}{12}}$ nach der 3ten Art.

11) $\sqrt{\frac{136}{243}}$ und $\sqrt{31\frac{72}{91}}$ auf alle 3 Arten.

12) $\sqrt{\left(4+\sqrt{\frac{8}{3}}\right)}$, auszurechnen.

13) $\sqrt{\left(5{,}87964-2\frac{46}{53}\right)}$ nach der 2ten Art.

Nach Sätzen der Geometrie (siehe Geometrie §. 76) ist der Inhalt eines Quadrats = der 2ten Potenz der Seite (woher auch die Benennung Quadrat statt 2te Potenz, und Quadratwurzel statt 2te Wurzel kommt). Die Seite ist also = der 2ten Wurzel aus dem Inhalte; ferner: Wenn man den Halbmesser eines Kreises annähernd aus dem Flächeninhalt finden will, so wird (nach §. 168) dieser mit 3,1416 getheilt und aus dem Resultate die Quadratwurzel gezogen.

Rechnet hiernach folgende Beispiele:

14) Wie groß sind die Seiten von 4 Quadraten, deren Inhalte = **576** Fuß, **371978,01** Fuß, $\frac{3}{71}$ Fuß und **462264**$\frac{1}{100}$ Ruthen sind.

15) Ein Kreis hat **5026,56** Fuß Inhalt, wie groß ist sein Halbmesser?

16) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, welcher **1** Fuß Inhalt hat?

§. 4. Quadratwurzel aus Buchstabenausdrücken.

a) Aus einfachen Ausdrücken.

$\sqrt{a^2}=a$, denn $(a)^2=a^2$, $\sqrt{a^6}=a^3$, denn $(a^3)^2=a^6$

$\sqrt{a^4b^6}=a^2b^3$, denn $(a^2b^3)^2=a^4b^6$; $\sqrt{\frac{a^4}{x^2}}=\frac{a^2}{x}$, denn $\left(\frac{a^2}{x}\right)^2=\frac{a^4}{x^2}$. Hieraus folgt:

Die Quadratwurzel aus Buchstabenausdrücken wird dadurch gefunden, daß man jeden Exponenten mit 2 theilt.

$$\sqrt{\frac{4a^2b^4}{c^6d^8}}=\frac{2ab^2}{c^3d^4},\quad \sqrt{\frac{49a^{2m}b^{4-2n}}{81c^{2n-4}}}=\frac{7a^mb^{2-n}}{9c^{n-2}}.$$

b) Aus zusammengesetzten Ausdrücken.

Man wendet die Formel $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)}=a+b$ an und verfährt wie in §. 2 *a*. gezeigt wurde.

3. B. $\sqrt{(m^4+6m^2n+9n^2)}=m^2+3n$

$$\begin{array}{rll} & & \;\;a\;\;\;\;\;\;b \\ a^2= & m^4 & \\ \hline \text{Rest:} & \quad{}^{\shortparallel}+6m^2n+9n^2 & :\ 2m^2+3n \\ & & \;\;2a\;\;\;\;\;b \\ 2ab+b^2= & 6m^2n+9n^2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{9a^2b^4-12ab^3+4b^2}{4x^{-4}+16ax^{-2}+16a^2}}=\frac{3ab^2-2b}{2x^{-2}+4a}.$$

(Man zieht die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner.)

$$\sqrt{(9a^2b^4 - 12ab^3 + 4b^2)} = 3ab^2 - 2b$$

$$\begin{array}{l} 9a^2b^4 \\ \hline \quad - 12ab^3 + 4b^2 \ : \ 6ab^2 - 2b \\ \quad - 12ab^3 + 4b^2 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{4x^{-4} + 16ax^{-2} + 16a^2} = 2x^{-2} + 4a$$

$$\begin{array}{l} 4x^{-4} \\ \hline \quad + 16ax^{-2} + 16a^2 \ : \ 4x^{-2} + 4a \\ \quad 16ax^{-2} + 16a^2 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

$$\sqrt{(4a^2 - 12a^3b + 9a^4b^2 + 8ac^2 - 12a^2bc^2 + 4c^4)} = 2a - 3a^2b + 2c^2$$

$$\begin{array}{l} 4a^2 \\ \hline \quad - 12a^3b + 9a^4b^2 \ : \ 4a - 3a^2b \\ \quad - 12a^3b + 9a^4b^2 \\ \hline \quad 8ac^2 - 12a^2bc^2 + 4c^4 \ : \ 4a - 6a^2b + 2c^2 \\ \quad 8ac^2 - 12a^2bc^2 + 4c^4 \\ \hline \qquad 0. \end{array}$$

$$\sqrt{(a^2 + b)} = a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} \ldots \text{ geht nicht auf.}$$

$$\begin{array}{l} a^2 \\ \hline \quad b \ : \ 2a + \frac{b}{2a} \\ \quad b + \frac{b^2}{4a^2} \\ \hline - \frac{b^2}{4a^2} \ : \ 2a + \frac{b}{a} \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Anwendung dieser Formel.

Man kann diese Formel für $\sqrt{(a^2 + b)}$ zur Ausziehung der Quadratwurzel aus jedem unvollständigen Quadrate anwenden.

Man sucht nämlich das nächstkleinere Quadrat a^2 und betrachtet den Rest als b, setzt dann die Werthe von a und b in die Reihe $a + \frac{b}{2a} - \ldots$ und behält eine solche Anzahl von Gliedern bei, daß die Wurzel die nöthige Genauigkeit erhält.

Z. B. $\sqrt{102} = \sqrt{(100 + 2)} = \sqrt{(10^2 + 2)}$.

Hier ist $a = 10$, $b = 2$; daher erhält man:

$$10 + \frac{2}{20} - \frac{4}{8000} + \frac{8}{1600000} - \ldots = 10 + 0{,}1 - 0{,}0005 + 0{,}000005 \ldots$$

$\sqrt{102} = 10{,}099505\ldots$, (auf andere Art findet man die Wurzel $= 10{,}0995049\ldots$)

Diese Methode ist namentlich dann sehr anwendbar, wenn a im Verhältniß zu b eine große Zahl ist; weil alsdann die Brüche $\frac{b^2}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5}$ u. s. w. sehr klein werden, und man daher schon mit $a + \frac{b}{2a}$ eine ziemliche Genauigkeit erhält.

Z. B. $\sqrt{40005} = \sqrt{(40000+5)} = \sqrt{(200^2+5)} = 200 + \frac{5}{400}\ldots$
$= 200{,}0125$ ungefähr, (genauer $= 200{,}0124996\ldots$)

Suchet ferner! $\sqrt{65}$, $\sqrt{902}$, $\sqrt{730}$, $\sqrt{90001\frac{1}{3}}$ (hier ist $b = \frac{4}{3}$).

Prüfet die Antworten durch Ausziehung der Quadratwurzel!

§. 5. Aufgaben.

1) $\sqrt{4a^6}$, $\sqrt{9a^2b^8}$, $\sqrt{\frac{36a^4x^{-6}}{25y^4}}$, $\sqrt{\frac{256x^4y^{2n}}{49z^{6-2n}}}$

2) $\sqrt{\left(\frac{4a^4b^6c^{-8}}{d^2f^4} \times \frac{9d^4f^6g^2}{16a^4b^4}\right)}$, $\sqrt{\frac{(a+b)^6}{(a+d)^8}}$:

3) $\sqrt{(a^2 - 4ab + 4b^2)}$, $\sqrt{(9x^2 + 6x^3 + x^4)}$

4) $\sqrt{(4a^4 + 36a^3b^2 + 81a^2b^4)}$, $\sqrt{(\frac{9}{4}x^4 - 3x^2y + y^2)}$

5) $\sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{2m}{3n} + \frac{1}{9}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{x^4y^2}{z^6} - \frac{3y}{z} + \frac{9z^4}{4x^4}\right)}$

6) $\sqrt{(a^{2m} - a^{m+1}b^{-3} + \frac{1}{4}a^2b^{-6})}$

7) $\sqrt{\frac{x^4 + 4ax^2 + 4a^2}{9x^6 - 12x^5 + 4x^4}}$, $\sqrt{\frac{16 - 24z^4 + 9z^8}{196 - 56z^2 + 4z^4}}$

8) $\sqrt{(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)}$

9) $\sqrt{(16x^8 - 32x^6y + 24x^4y^2 - 8x^2y^3 + y^4)}$

10) $\sqrt{(1024m^4 - 5120m^3 + 9600m^2 - 8000m + 2500)}$

11) $\sqrt{(a^6 - 12a^5x^2 + 60a^4x^4 - 160a^3x^6 + 240a^2x^8 - 19ax^{10} + 64x^{12}}$

12) $\sqrt{\left(\frac{4a^4}{9b^8} - \frac{1}{b^3} + \frac{9b^2}{4a^4} - \frac{8a}{3b^3} + 3a^{-3}b^2 + \frac{4b^2}{a^2}\right)}$

13) $\sqrt{(1 + x)}$, und $\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

§. 6. Cubikwurzeln aus Zahlen.

a) Die 3ten Potenzen der einzifferigen Zahlen sind:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Da nun nach II. §. 8, b. 4: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ist, so muß auch die Cubikwurzel aus diesem Aggregat $= a + b$ sein. Schreibt man nun die Summe in folgender Form:

$\sqrt[3]{[a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b]} = a + b$, so muß zuerst, um a zu finden, aus a^3 die 3te Wurzel gezogen werden; um nun b zu finden, muß man den Rest mit $3a^2 + 3ab + b^2$, also zunächst mit $3a^2$, theilen; das hierdurch gefundene b wird alsdann mit 3a und mit sich selbst multiplicirt und endlich die Summe $3a^2 + 3ab + b^2$ wieder mit b vervielfacht und abgezogen. Also:

$$\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)} = a + b$$
$$a^3$$
$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 : 3a^2 + 3ab + b^2$$
$$3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$0.$$

Es sei nun z. B. $\sqrt[3]{74088}$ zu finden. Diese ist 2zifferig, denn $10^3 = 1000$ und $100^3 = 1000000$ und $\sqrt[3]{74088}$ liegt also zwischen 10 und 100.

Nun ist $40^3 = 64000$ und $50^3 = 125000$,

also ist $\sqrt[3]{74088} = 40 + 2 = 42$

$$a^3 = 64000 \quad a \quad b$$
$$10088 : 4800 = 3a^2 \text{ geht 2mal.}$$
$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 10088 \qquad 240 = 3ab$$
$$0. \qquad 4 = b^2$$
$$5044 = 3a^2 + 3ab + b^2 \text{ mit } 2 = b$$

multiplicirt gibt: 10088, dieses subtrahirt.

Läßt man hier auf ähnliche Weise wie bei der Quadratwurzel die Nullen an 64000, an 40, 4800 u. s. w. weg, so ergibt sich folgendes abgekürzte Verfahren:

Man theile von der rechten Seite 3 Stellen ab, ziehe $\sqrt[3]{74} = 4$, ziehe $4^3 = 64$ von 74 ab, setze die nächsten 3 Stellen herunter, gibt 10088, erhebe 4 ins Quadrat und nehme dieses 3fach, theile dann in 10088 (wobei die 2 letzten Ziffern wegbleiben, also in 100), so folgt die 2te Ziffer 2.

Diese wird nun mit der ersten multiplicirt und 3mal genommen und um eine Stelle rechts unter das 3fache Quadrat der ersten gesetzt, dann die 2te Ziffer quadrirt und wieder um eine Stelle rechts eingerückt, die 3 Posten addirt und mit der 2ten Ziffer multiplicirt und dann abgezogen von 10088; also:

$\sqrt[3]{74|088} = 42$

64

100(88 : 48
100 88   24
0.   4
5044 × 2

Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß man bei Zahlen, welche mehr als 6 Ziffern haben, ebenso verfahren kann, und daß man, um **a** zu finden, die Zahl von der rechten Seite gegen die linke in Classen zu je 3 Ziffern abzutheilen hat, aus den übrig bleibenden Ziffern wird dann $\sqrt[3]{\ }$ gezogen, um **a** zu finden.

$\sqrt[3]{143|055|667} = 523.$

125

180(55 : $3 . 5^2 = 75$ in 180 geht 2mal.
156 08 $3 . 5 . 2 = 30$
2 447 $2^2 = 4$
7804 mit 2 multiplicirt.

2447667 : $3 . 52^2 = 8112$ in 24476 geht 3mal.
2447667 $3 . 52 : 3 = 468$
0. $3^2 = 9$
815889 mit 3 multiplicirt.

Anmerkung. Wenn man die nebenstehenden Größen mit kleinen Ziffern schreibt, so kann die Wurzelausziehung ohne Zwischenräume bei den Resten ausgeführt werden, z. B. wie in der folgenden Aufgabe.

b) Wenn die Cubikwurzel aus einem Decimalbruch gezogen werden soll, so theilt man vom Comma aus rechts ab und zwar in dreistellige Classen, weil $\left(\frac{a}{10}\right)^3 = \frac{a^3}{1000}$ also $\sqrt[3]{\frac{a^3}{1000}} = \frac{a}{10}$, $\sqrt[3]{\frac{a^3}{1000000}} = \frac{a}{100}$ u. s. w. ist, also aus Tauselnten die Wurzel = Zehntel und aus Millionteln die Wurzel = 100teln ist.

Bei einer ganzen Zahl mit einem angehängten Decimalbruch wird aus gleichen Gründen vom Comma aus nach beiden Seiten abgetheilt, und bei einer ganzen Zahl, aus welcher die Wurzel nicht aufgeht, werden an den Rest drei Nullen angesetzt, um Zehntel u. s. w. zu finden. Z. B.

$\sqrt[3]{7,139|42} = 1,9$[illegible]$2 \ldots$

1

61(39 : 3
  27
58 59   81
  651

2 804(20 :
2 558 75

245450(00 : 114075 u. s. w.

(Da hier die letzte Classe 42 nur 2 Ziffern hatte, so mußte eine Null angehängt werden.)

c) Soll die Cubikwurzel aus einem gemeinen Bruch gezogen werden, so kann man wieder auf die 3 Arten verfahren, welche §. 2 f gezeigt wurden.

3. B. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$, denn $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

$$\sqrt[3]{\frac{17}{209}} = \frac{\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{209}} = \frac{2,571}{5,934} = 0,433\ldots$$

oder $\sqrt[3]{\frac{17}{209}} = \sqrt[3]{0,081339} = 0,433\ldots$

oder $\sqrt[3]{\frac{17}{209}} = \sqrt[3]{\frac{17 \cdot 209^2}{209^3}} = \frac{\sqrt[3]{742577}}{209} = \frac{90,5\ldots}{209} = 0,433\ldots$

$\sqrt[3]{8\frac{13}{16}} = \sqrt[3]{\frac{141}{16}} = \sqrt[3]{\frac{141 \cdot 4}{64}} = \frac{\sqrt[3]{564}}{4}$ u. s. w.

d) Um die Resultate zu prüfen, erhebe man dieselben in die 3te Potenz und addire die etwa gebliebenen Reste, so müssen die gegebenen Zahlen zum Vorschein kommen.

§. 7. Beispiele.

1) $\sqrt[3]{1728}$, $\sqrt[3]{729000}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{343}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$

2) $\sqrt[3]{54872}$, $\sqrt[3]{4330747}$, $\sqrt[3]{63521199000}$

3) $\sqrt[3]{222545016}$, $\sqrt[3]{1371330631}$

4) $\sqrt[3]{10706,185664}$, $\sqrt[3]{915,498611}$

5) $\sqrt[3]{11}$ auf 4 Stellen, $\sqrt[3]{0,00002796}$ auf 5 Stellen.

6) $\sqrt[3]{18\frac{26}{27}}$ auf die erste Art, ebenso $\sqrt[3]{\frac{15}{343}}$

7) $\sqrt[3]{\frac{371}{1982}}$ auf die 2 ersten Arten.

8) $\sqrt[3]{\frac{52}{103}}$, $\sqrt[3]{3\frac{1}{32}}$ auf die 3te Art.

9) $\sqrt[3]{961\frac{5}{9}}$ auf alle drei Arten.

Die Geometrie lehrt, daß die Seite eines Würfels (Cubus) = der dritten Wurzel aus dem Inhalte desselben ist, (hierher rührt auch die Benennung Cubikwurzel) und daß der Durchmesser einer Kugel annähernd aus dem Cu-

bikinhalte derselben gefunden wird, wenn man den Inhalt durch $\frac{3,1416}{6}$ oder durch 0,5236 theilt und aus dem Resultat die Cubikwurzel zieht.

Rechnet hiernach folgende Aufgaben:

10) Wie groß ist die Seite eines Würfels, dessen Inhalt = 5 Fuß ist.

11) Welche Seite hat ein Würfel, dessen Inhalt = 9528,128 ist?

12) Eine Kugel hat 4188,8 Cubikfuß Inhalt, wie groß ist ihr Durchmesser.

13) Der Cubikinhalt der Erde ist ungefähr = 2659 Millionen Meilen, wie groß ist der Durchmesser derselben, wenn sie als eine vollkommene Kugel betrachtet wird?

14) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel von 1 Fuß Inhalt?

§. 8. Cubikwurzeln aus Buchstabenausdrücken.

a) Einfache Ausdrücke.

Da $(a^2)^3 = a^6$, so ist auch $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ und da $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^3 = \frac{a^9}{b^6}$, so ist auch $\sqrt[3]{\frac{a^9}{b^6}} = \frac{a^3}{b^2}$ u. s. w.; man theile daher den Exponenten der Potenz durch 3, so findet man den Exponenten der Wurzel.

Z. B. $\sqrt[3]{\frac{a^{12}}{8b^9}} = \frac{a^4}{2b^3}$, $\sqrt[3]{\frac{27a^{-3}b^6}{64d^{-3}x^3}} = \frac{3a^{-1}b^2}{4d^{-1}x} = \frac{3b^2d}{4ax}$.

b) Aus zusammengesetzten Ausdrücken.

Das allgemeine Verfahren, welches in §. 6. gegeben wurde für $(a+b)^3$, gilt auch hier;

z. B. $\sqrt[3]{(x^6 - 6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3)} = \underset{a}{x^2} - \underset{b}{2xy}$

$$x^6$$

$$\overline{-6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3} : \underset{3a^2}{3x^4} - \underset{3ab}{6x^3y} + \underset{b^2}{4x^2y^2}$$

$$\mp 6x^5y \pm 12x^4y^2 \mp 8x^3y^3$$

$$0. \quad \text{mit } -2xy \text{ multip.}$$

$$\sqrt[3]{(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3+3m^2p+6mnp+3mp^2+3n^2p+3np^2+p^3)} =$$

$$m^3 \qquad = \underbrace{m+n}_{a} + \underset{b.}{p}$$

$$\overline{3m^2n+3mn^2+n^3} : 3m^2+3mn+n^2$$

$$3m^2n+3mn^2+n^3$$

$$0.$$

$$3m^2p+6mnp+3mp^2+3n^2p+3np^2+p^3 : \underbrace{3m^2+6mn+3n^2}_{a^2} +$$

$$3m^2p+6mnp+3mp^2+3n^2p+3np^2+p^3 \qquad + \underbrace{3mp+3np}_{3ab} + \underbrace{p^2}_{b^2}$$

$$0.$$

$$\sqrt[3]{(a^3 + b)} = a + \frac{b}{3a^2} - \frac{b^2}{9a^5} + \ldots .$$

$$\frac{a^3}{}$$

$$\qquad b \; : 3a^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{9a^4}$$

$$b + \frac{b^2}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6}$$

$$- \frac{b^2}{3a^3} - \frac{b^3}{27a^6} \quad : 3a^2 + \ldots .$$

Anwendung.

Diese Formel läßt sich auf ähnliche Weise anwenden wie bei $\sqrt{(a^2 + b)}$ in §. 4. gezeigt wurde.

Z. B. $\sqrt[3]{1001} = \sqrt[3]{(10^3 + 1)}$, hier ist $a = 10$, $b = 1$.

Daher $\sqrt[3]{1001} = 10 + \frac{1}{300} - \frac{1}{900000} \ldots = 10{,}0033322 \ldots$

Suchet ferner auf diese Art folgende Wurzeln:

$\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{127}$, $\sqrt[3]{8003}$, $\sqrt[3]{64\frac{1}{2}}$ (hier ist $b = \frac{1}{2}$).

(Prüfet die Resultate durch Ausziehung der Cubikwurzel!)

$$\sqrt[3]{\frac{a^{3m} - 9a^{2m}b^n + 27a^m b^{2n} - 27b^{3n}}{8a^3 + 12a^4 b + 6a^5 b^2 + a^6 b^3}} = \frac{a^m - 3b^n}{2a + a^2 b}$$

(Man ziehe die Wurzel aus dem Zähler und Nenner:)

§. 9. Aufgaben.

1) $\sqrt[3]{a^9}$, $\sqrt[3]{a^6 b^{18}}$, $\sqrt[3]{125a^{3n}b^{12}}$, $\sqrt[3]{\frac{8a^{3-3n}}{27b^{6m}}}$

2) $\sqrt[3]{0{,}001 \frac{a^{-6}b^3}{c^9 d^{-6n}}}$, $\sqrt[3]{\frac{(a+b)^6 \times (c+b)^3}{8(a-b)^3 \times (a+c)^3}}$

3) $\sqrt[3]{(a^3 - 6a^2 b + 12ab^2 - 8b^3)}$, $\sqrt[3]{(8 - 24x + 24x^2 - 8x^3)}$

4) $\sqrt[3]{\left(\frac{27a^6}{8b^3} - 9 + 8a^{-6}b^3 - \frac{64b^6}{27a^{12}}\right)}$

5) $\sqrt[3]{(1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6)}$

6) $\sqrt[3]{(729a^3 - 2916a^3 x + 4860a^3 x^2 - 4320a^3 x^3 + 2160a^3 x^4 - 576a^3 x^5 + 64a^3 x^6)}$

7) $\sqrt[3]{(a^6 - 6a^5 b^2 + 15a^4 b^4 - 20a^3 b^6 + 15a^2 b^8 - 6ab^{10} + b^{12})}$

8) $\sqrt[3]{\frac{343a^3 c^6 - 294a^2 c^4 d^3 + 84ac^2 d^6 - 8d^9}{8a^6 c^3 - 24a^5 c^2 + 24a^4 c - 8a^3}}$

9) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^9} - \frac{9}{a^7} + \frac{36}{a^5} - \frac{84}{a^3} + \frac{126}{a} - 126a + 84a^3 - 36a^5 + 9a^7 - a^9\right)}$

10) $\sqrt[3]{(a^3 + b^3)}$ und $\sqrt[3]{(1 - x)}$.

§. 10. Wurzelausziehung im Allgemeinen.

a) Weil $(a^m)^n = a^{mn}$, so muß auch $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$ sein, d. h. man theilt bei der Wurzelausziehung aus einfachen Größen den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten.

Z. B. $\sqrt[4]{a^8b^{12}} = a^2b^3$, $\sqrt[6]{\frac{a^{-12}b^{6n}}{c^{18}}} = \frac{a^{-2}b^n}{c^3} = \frac{b^n}{a^2c^3}$.

b) Wenn nun der Wurzelexponent sich in den Potenzexponenten nicht theilen läßt, dann deutet man diese Division durch einen Bruchexponenten an und die Potenz heißt dann eine Bruchpotenz.

Man deutet z. B. $\sqrt[3]{a^5}$ durch $a^{\frac{5}{3}}$, $\sqrt[4]{b^3}$ durch $b^{\frac{3}{4}}$ an; denn $\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^3$ gibt $a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{5}{3}} = a^5$.

$\sqrt[3]{a^2b} = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, denn $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^2b$.

Ebenso kann man statt $a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{7}{5}}$ die Größe $\sqrt[5]{a^4b^7}$ setzen.

Man wendet diese Bezeichnung in der Wurzelrechnung (Abschn. IV.) sehr häufig an, um die Rechnungen abzukürzen.

c) Aus negativen Größen können nur ungerade Wurzeln gezogen werden, und diese sind dann negativ.

Denn z. B. $\sqrt[3]{-a^6} = -a^2$, weil $(-a^2)^3 = -a^6$,

$\sqrt[5]{-a^{-10}} = -a^{-2}$, denn $(-a^{-2})^5 = -a^{-10}$

d) Gerade Wurzeln aus negativen Größen sind unmöglich, da jede positive oder negative Größe in einer geraden Potenz positiv ist.

Z. B. $\sqrt{-4}$ ist unmöglich, denn es gibt keine Zahl, welche mit sich multiplicirt $= -4$ ist; ebenso $\sqrt[4]{-a}$ u. s. w.

Man nennt solche gerade Wurzeln aus negativen Größen imaginaire oder unmögliche Größen.

Solche Größen kommen in derartigen Aufgaben als Resultate zum Vorschein, in welchen von unrichtigen Annahmen ausgegangen wurde, man darf jedoch nicht jede Rechnung aufgeben, sobald imaginaire Größen erscheinen; denn diese lassen sich häufig wieder reduciren, und fallen weg.

Z. B. die Geometrie lehrt, daß der Inhalt eines Dreiecks, dessen 3 Seiten **a**, **b** und **c** sind, durch folgende Formel gefunden werden kann (siehe Geometrie Seite 82):

$$\text{Inh} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Es sei nun der Inhalt eines Dreiecks zu finden, dessen Seiten $= 12$, 16 und 29 sind, so erhält man, wenn z. B. $a = 12$, $b = 16$ und $c = 29$ in die Formel gesetzt wird:

$$\text{Inh} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(57 . -1 . 25 . 33)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{-47025} \text{ (ist nicht reducirbar)}.$$

Der Inhalt ist daher unmöglich; untersucht man nun, woher das Zeichen — kommt, so zeigt sich, daß die Unmöglichkeit darin liegt, weil $12 + 16 - 29 = -1$, oder weil $12 + 19 < 29$ ist; d. h. die Summe zweier Seiten ist kleiner als die 3te angenommen worden, und dies ist unmöglich (siehe Geometrie §. 35.).

Es sei ferner die Aufgabe gegeben:

Man soll 2 Zahlen finden (welche wir x und y nennen wollen), deren Quadrate zusammen = 25 oder $x^2 + y^2 = 25$, und deren doppeltes Produkt $2xy = 26$ ist, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ 2xy &= 26 \end{aligned}\right\} \text{subtrahirt gibt!}$$

$x^2 - 2xy + y^2 = -1$, oder $(x - y)^2 = -1$, daher

$$x - y = \sqrt{-1},$$

der Unterschied der 2 Zahlen ist daher eine unmögliche Größe, daher sind die Zahlen selbst unmöglich und dieses rührt daher, weil $26 > 25$, also $2xy > x^2 + y^2$ ist; das doppelte Produkt zweier Zahlen kann daher nie größer als die Summe der Quadrate sein.

e) Eine jede gerade Wurzel aus einer positiven Größe kann sowohl positiv als negativ sein, z. B. $\sqrt{4} = +2$ und $\sqrt{4}$ ist auch $= -2$, weil $(-2)^2$ ebenfalls $= +4$ ist; ebenso ist $\sqrt[4]{a^8} = \pm a^2$.

f) Wenn mehrere Wurzeln nach einander aus einer Größe gezogen werden sollen, so kann man alle Wurzelexponenten (durch Multiplication derselben) zu einem verbinden. Z. B.

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt[6]{a^{12}} = a^2, \text{ denn } \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{a^{\frac{12}{3}}} = \sqrt{a^4} = a^2$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}. \text{ Ebenso:}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} = \sqrt[24]{a}, \text{ und } \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt{x}}} = \sqrt[2mn]{x}.$$

g) Aus dem Vorhergehenden folgt zugleich, daß eine höhere Wurzel (wenn ihr Exponent Faktoren hat) sich in mehrere niedere zerlegen läßt, z. B.

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}, \quad \sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} \text{ oder } \sqrt{\sqrt[3]{a}}.$$

Mit Hülfe dieses Satzes kann man manche höhere Wurzeln durch Anwendung der Quadratwurzel und Cubikwurzel ausziehen. Z. B.

$$\sqrt[4]{7} = \sqrt{\sqrt{7}} = \sqrt{2{,}645751} = 1{,}6265 \ldots.$$

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2} = 1{,}414214 \ldots.$$

$$\sqrt[9]{24} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{24}} = \sqrt[3]{2{,}884499} = 1{,}42 \ldots.$$

$$\sqrt[12]{0{,}7} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{0{,}7}}} \text{ u. s. w.}$$

Ebenso bei Buchstabenausdrücken, z. B.

$$\sqrt[6]{(a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1)}$$

Man setze statt $\sqrt[6]{}$ die $\sqrt[3]{\sqrt{}}$ so folgt:

$$\sqrt{(a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1)} = a^3-3a^2+3a-1$$

und nun hat man $\sqrt[3]{(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)} = a - 1$.

Oder, setze $\sqrt[6]{} = \sqrt{\sqrt[3]{}}$, ziehe daher zuerst die Cubikwurzel aus, und dann aus dieser die Quadratwurzel.

Rechnet diese Aufgabe auf beide Arten.

h) Läßt sich aber ein Wurzelexponent nicht in mehrere Faktoren zerlegen, z. B. 5, 7, 11, ... so kann man die Wurzel dennoch finden;

z. B. $\sqrt[5]{4}$, man rechne $(a+b)^5$ nach II. §. 8. b. 6.; so erhält man eine Formel, welche das Verfahren anzeigt, auf welche Weise die 5te Wurzel aus einer Zahl zu finden ist, wie dies durch die Formeln von $(a+b)^2$ und $(a+b)^3$ für die Quadrat- und Cubikwurzel geschah. Die Rechnung wird aber sehr weitläufig und man wendet daher andere Mittel an, welche wir in Abschnitt **VI**. kennen lernen werden.

§. 11. Aufgaben.

1) $\sqrt[4]{\frac{a^8b^4}{c^{12}}}$, $\sqrt[5]{-\frac{a^{15}}{b^{10}}}$, $\sqrt[6]{\frac{a^{12}b^{-6}}{d^6 f^{6n}}}$, $\sqrt[m]{\frac{a^m b^{2m}}{c^{mn+m}}}$.

2) Schreibet folgende Wurzeln als Bruchpotenzen!

$\sqrt[4]{\frac{a^3b^2}{c^5}}$, $\sqrt[5]{\frac{ab^4}{c^{-3}d}}$, $\sqrt[5]{-\frac{a^4b^3c^2d^{-7}}{2^3g^{-7}}}$, $\sqrt[4]{\frac{2^3 \cdot 3^5}{4^5 \cdot 7^3}}$

3) Verwandelt nachstehende Größen in Wurzelgrößen!

$a^{\frac{5}{4}}$, $\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{7}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, $\left(\frac{abc}{d}\right)^{\frac{7}{12}}$, $6a^{\frac{1}{0,52}}$ und $0,3^{0,3}$

4) Schreibet folgende Ausdrücke mit einem Wurzelzeichen:

$\sqrt[3]{\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2b}}}$.

5) Zerleget folgende Wurzeln in einfachere:

$\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt[12]{x^4y}$, $\sqrt[20]{ax}$.

Suchet folgende Wurzeln:

6) $\sqrt[6]{4096}$, $\sqrt[4]{35247}$, $\sqrt[8]{172,833}$.

7) $\sqrt[9]{387420489}$, $\sqrt[12]{0,000517613}$.

8) $\sqrt[4]{(1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4)}$.

9) $\sqrt[4]{(16a^8 - 32a^6b + 24a^4b^2 - 8a^2b^3 + b^4)}$.

10) $\sqrt[6]{(64a^6x^6 - 96a^5x^5y^2 + 60a^4x^4y^4 - 20a^3x^3y^6 +}$
$$+ \frac{15}{4}a^2x^2y^8 - \frac{3}{8}axy^{10} + \frac{y^{12}}{64}).$$

Vierter Abschnitt.

Rechnung mit Wurzelgrößen.

§. 1. Addition und Subtraction.

Nur gleiche Wurzelgrößen können addirt oder subtrahirt werden; man verbindet alsdann ihre Coefficienten.

Z. B. $3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$, $5\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$

$5\sqrt[4]{a^3} - 3\sqrt[4]{a^3} - 2\sqrt[4]{a^3} = 0$, $-3\sqrt{-1} + 8\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$

$4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} + 6\sqrt[3]{a} - 8\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{a}$.

$2\sqrt{6} + 7\sqrt[3]{3} - 8\sqrt[3]{6} + 9\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{6} = 16\sqrt[3]{3} - 8\sqrt[3]{6}$

$$\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 8\sqrt[3]{4a} + 4\sqrt[4]{3b^3} \\ 3\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 8\sqrt[3]{4a} - 2\sqrt[4]{b^3} \end{array}\right\} \text{addirt:}$$

$$6\sqrt{3} + 11\sqrt{2} + 4\sqrt[4]{3b^3} - 2\sqrt[4]{b^3}$$

Subtrahirt man beide Reihen, so folgt:

$$-\sqrt{2} - 16\sqrt[3]{4a} + 4\sqrt[4]{3b^3} + 2\sqrt[4]{b^3}.$$

§. 2. Aufgaben über die Addition und Subtraction.

1) $9\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$

2) $6a\sqrt[3]{a} + 5a\sqrt[3]{a} - 3a\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a}$

3) $\left.\begin{array}{l} 4\sqrt{2} - 8\sqrt[3]{a} + 5b\sqrt[3]{c^2} - 6\sqrt[4]{5} \\ 2\sqrt{2} + 8\sqrt[3]{a} - 3b\sqrt[3]{c^2} + 3\sqrt[3]{5} \end{array}\right\}$ addiren und subtrahiren.

4) $0{,}6\sqrt{-3} + 6{,}7\sqrt{-3} - 8{,}12\sqrt{-3} + 5\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} + 2\sqrt{-4}$

5) $\left.\begin{array}{l} 0{,}6\sqrt{ab} + 2\sqrt[3]{a^2c} + \sqrt{3b} - 7\tfrac{2}{3}\sqrt[4]{d^3} \\ 0{,}8\sqrt{ab} + 3\sqrt[3]{a^2c} - \sqrt{3b} + 9\tfrac{3}{4}\sqrt[4]{d^3} \end{array}\right\}$ addiren und abziehen.

§. 3. Veränderungen und Abkürzungen.

a) Man kann bei jeder Wurzelgröße den Potenz- und Wurzelexponenten, beide mit jeder beliebigen Größe multipliciren und dividiren, ohne den Werth der Größe zu ändern.

Beweis:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

beide Exponenten sind also p mal größer geworden.

Ebenso ist wieder umgekehrt $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$, man kann also auch beide durch p theilen.

b) Dieses Verfahren wird angewendet, um gleiche Wurzelexponenten zu erhalten und um Wurzelgrößen abzukürzen.

Z. B. $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$, oder: $\sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Die Größen: $2\sqrt[3]{a^2}$ und $3\sqrt[4]{a^3}$ sollen gleiche Wurzelexponenten erhalten.

Der gemeinschaftliche Exponent ist = 12, daher:

$$2\sqrt[3]{a^2} = 2\sqrt[12]{a^8}, \text{ und } 3\sqrt[4]{a^3} = 3\sqrt[12]{a^9}.$$

$$3\sqrt[4]{a^2} + 2\sqrt{a} + 5\sqrt[6]{a^3} = 3\sqrt{a} + 2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} = 10\sqrt{a}.$$

a^2b soll als eine Cubikwurzel geschrieben werden; so setze $\sqrt[3]{a^6b^3}$.

$a^3\sqrt{a}$, a^3 soll unter das Wurzelzeichen gebracht werden, so ist $a^3\sqrt{a} = a^3 \, . \, a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}} = \sqrt{a^7}$, oder a^3 kommt als a^6 unter das Wurzelzeichen, und gibt mit a multiplicirt das Produkt a^7.

$$a^2\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a^7} - 2a\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^7} + 3\sqrt[3]{a^7} - 2\sqrt[3]{a^7} = 2\sqrt[3]{a^7}.$$

$$\sqrt{(2\sqrt{3})} = \sqrt{\sqrt{4\,.\,3}} = \sqrt[4]{12}, \quad \sqrt[3]{(a^2\sqrt{a})} = \sqrt[3]{(\sqrt{a^5})} = \sqrt[6]{a^5}.$$

Man erhebt die Größe in die sovielte Potenz, als der Wurzelexponent anzeigt.

c) $\sqrt{a^2b} = a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a \, . \, \sqrt{b}$,

$\sqrt[n]{a^nb} = a^{\frac{n}{n}}b^{\frac{1}{n}} = a\sqrt[n]{b}$.

Hieraus folgt: daß man jede Größe, welche unter einem Wurzelzeichen steht und als Faktor eines Produkts erscheint, vor das Wurzelzeichen als Faktor setzen kann; wenn man die Wurzel aus der Größe zieht.

Hierauf beruhen viele Abkürzungen.

Z. B. $\sqrt{32} + \sqrt{8} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{18}$.

Man suche jede Größe unter der Wurzel in 2 Faktoren zu zerlegen, von welchen der eine eine Quadratzahl ist; man erhält dann:

$\sqrt{16 \, . \, 2} + \sqrt{4 \, . \, 2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{9 \, . \, 2} =$

$= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 18\sqrt{2}.$

$14a\sqrt{ab^3} - 7b\sqrt{a^3b} + 3ab\sqrt{ab} - 8\sqrt{4a^3b^3} =$

$= 14a\sqrt{b^2 \, . \, ab} - 7b\sqrt{a^2 \, . \, ab} + 3ab\sqrt{ab} - 8\sqrt{2^2 \; a^2b^2 \, . \, ab} =$

$= 14ab\sqrt{ab} - 7ab\sqrt{ab} + 3ab\sqrt{ab} - 16ab\sqrt{ab} = -6ab\sqrt{ab}.$

$3\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{250} - 6\sqrt[3]{54} + 8\sqrt[3]{4}.$

Suche die Zahlen in 2 Faktoren zu zerlegen, von denen der eine eine Cubikzahl ist.

$3\sqrt[3]{8 \, . \, 2} - 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{125 \, . \, 2} - 6\sqrt[3]{27 \, . \, 2} + 8\sqrt[3]{4} =$

$= 6\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 18\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{4} = 8\sqrt[3]{4}.$

Anmerkung.

Bei der wirklichen Ausrechnung der Werthe der Wurzeln (in Decimalbrüchen) hat man z. B. in der vorhergehenden Aufgabe nur eine Wurzel auszuziehen, während in der anfänglichen Summe 5 Wurzeln auszuziehen wären.

$\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{a^5b}{d^5g^3}} + \frac{2a}{3dg}\sqrt[4]{\frac{abg}{d}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{a^4b \, . \, a \, . \, g}{d^4 \, . \, dg^4}}$ + 2te Größe

$= \frac{a}{2dg}\sqrt[4]{\frac{abg}{d}} + \frac{2a}{3dg}\sqrt[4]{\frac{abg}{d}} = \frac{7a}{6dg}\sqrt[4]{\frac{abg}{d}}.$

$- 3\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{3b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}} = -3\sqrt{\frac{b \, . \, a}{a^2}} + \frac{3b}{a}\sqrt{\frac{a \, . \, b}{b^2}} =$

$= -\frac{3}{a}\sqrt{ab} + \frac{3b}{ab}\sqrt{ab} = -\frac{3}{a}\sqrt{ab} + \frac{3}{a}\sqrt{ab} = 0.$

$\sqrt{(3a^3 + 6a^2b^2 + 3ab^4)} = \sqrt{3a(a^2 + 2ab^2 + b^4)} = (a + b^2)\sqrt{3a}.$

§. 4. Beispiele.

1) Kürzet folgende Wurzelgrößen ab!

$2\sqrt[4]{a^2}, \quad 3\sqrt[6]{a^3}, \quad a\sqrt[8]{x^2}, \quad b\sqrt[10]{2^4y^6}, \quad a\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^3}}$

2) Verwandelt folgende Größen in 6te Wurzeln!

$a, \quad \frac{ab}{c}, \quad \sqrt{ax}, \quad \sqrt[3]{\frac{b}{y^2}}, \quad \sqrt[3]{(a\sqrt{a})}, \quad \sqrt{(2\sqrt[3]{5})}.$

3) Schreibet folgende Größen mit einem Wurzelzeichen!

$3\sqrt{2\sqrt{2}}, \quad 5a\sqrt[3]{(a\sqrt[3]{a})}, \quad \sqrt{(3a\sqrt[3]{\frac{a}{9}})}, \quad \sqrt{[2\sqrt{(2\sqrt{2})}]}$

Vereiniget folgende Glieder!

4) $5\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 7\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{2}{9}} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{20}$

5) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - 2\sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{48} + 15\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$

6) $7a\sqrt{a} + 2\sqrt{a^3} - \frac{3}{a}\sqrt{a^5} + 2a^2\sqrt{\frac{4}{a}} - 5a\sqrt{4a}$

7) $\sqrt[3]{2^7b^9c^4} + 4b^3c\sqrt[3]{2^4c} - \frac{2b}{c}\sqrt[3]{16b^6c^7}$

8) $-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2}{b}} + \frac{3b}{a^2}\sqrt{\frac{8a^2}{9b}} + 3\sqrt{\frac{50b}{9a^2}}$

9) $\frac{5c^2}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{c^2}} - 2c\sqrt[3]{\frac{8c}{x^2}} + \frac{9c^2}{2x^2}\sqrt[3]{\frac{64x^4}{27c^5}}$

10) $\sqrt{\frac{9a^2b^3}{a^4+2a^2b+b^2}} - \frac{2ab}{(a^2+b)^2}\sqrt{b(a^2+b)^2}$

Reduciret folgende Wurzelausdrücke:

11) $\sqrt{\frac{3ab^2c^3}{5a^2-10ab+5b^2}}$, $\sqrt{\frac{2a^2b-4a^3b+2a^4b}{5a^4c-20a^2c^2+20c^3}}$

12) $\sqrt[3]{\frac{2a^4+6a^3b+6a^2b^2+2ab^3}{3a^3b-9a^2b^2+9ab^3-3b^4}}$

§. 5. Multiplication.

Wenn die Wurzelexponenten gleich sind, so multiplicirt man die Größen unter den Wurzelzeichen; sind sie nicht gleich, so werden die Größen zuerst nach §. 3. b. in Wurzelgrößen mit gleichen Wurzelexponenten verwandelt und dann multiplicirt.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a, \text{ d. h.:}$$

Wenn man eine Quadratwurzelgröße mit sich selbst multiplicirt, so fällt das Wurzelzeichen weg.

$$4\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot -5\sqrt{2} = -20\sqrt{36} = -120.$$

$$-0{,}2\sqrt[3]{a} \cdot -0{,}5\sqrt[3]{ab} = 0{,}1\sqrt[3]{a^2b}, \quad \sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^5} = a.$$

Imaginaire Größen werden immer zuerst auf die Form $a\sqrt{-1}$ gebracht, ehe man sie multiplicirt, und $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ gibt -1, nach dem vorhergehenden Satze.

$$3\sqrt{-5} = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}, \quad b\sqrt{-a} = b\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$$

$$3\sqrt{-2} \cdot 2\sqrt{-3} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{6} \cdot -1 = -6\sqrt{6}.$$

(Hier fällt also das Imaginaire weg!)

$$(2\sqrt{3} + 7\sqrt{2} - 8\sqrt{5}) \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{18} + 14\sqrt{12} - 16\sqrt{30}$$
$$= 12\sqrt{2} + 28\sqrt{3} - 16\sqrt{30}.$$

$$(3\sqrt[3]{a} - 7\sqrt[3]{ab} + 4\sqrt[3]{b^2}) \times 2\sqrt[3]{a^2b} = 6\sqrt[3]{a^3b} - 14\sqrt[3]{a^3b^2} + 8\sqrt[3]{a^2b^3}$$
$$= 6a\sqrt[3]{b} - 14a\sqrt[3]{b^2} + 8b\sqrt[3]{a^2}.$$

$$(5\sqrt{-2} + 7\sqrt{-6} + 9\sqrt{-3}) \times -2\sqrt{-6} =$$
$$= (5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} + 7\sqrt{6} \cdot \sqrt{-1} + 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}) \cdot -2\sqrt{6} \cdot \sqrt{-1} =$$
$$= +10\sqrt{12} + 84 + 18\sqrt{18} = 84 + 20\sqrt{3} + 54\sqrt{2}.$$

Man kann hier auch $\sqrt{-1}$ als Faktor heraussetzen; also:

$$(5\sqrt{2}+7\sqrt{6}+9\sqrt{3}) \,.\, \sqrt{-1} \times -2\sqrt{6} \,.\, \sqrt{-1} =$$
$$= (5\sqrt{2}+7\sqrt{6}+9\sqrt{3}) \,.\, -2\sqrt{6} \,.\, -1 =$$
$$= (5\sqrt{2}+7\sqrt{6}+9\sqrt{3}) \times 2\sqrt{6}.$$

$$(2+\sqrt{3}) \times (3-\sqrt{2}) = 6+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 8\sqrt[4]{a^3} + 8\sqrt[4]{a} + 6\sqrt[4]{b} \\ 4\sqrt[4]{a^3} + 4\sqrt[4]{a} - 3\sqrt[4]{b} \end{array}\right\} \text{multipliciren!}$$

$$\begin{array}{l} 32\sqrt[4]{a^6} + 32\sqrt[4]{a^4} + 24\sqrt[4]{a^3b} \\ \qquad + 32\sqrt[4]{a^4} \qquad\qquad + 32\sqrt[4]{a^2} + 24\sqrt[4]{ab} \\ \qquad\qquad\qquad - 24\sqrt[4]{a^3b} \qquad\qquad - 24\sqrt[4]{ab} - 18\sqrt[4]{b^2} \\ \hline 32\sqrt[4]{a^3} + 64a + 32\sqrt{a} - 18\sqrt{b} = 32(a+1)\sqrt{a} + 64a - 18\sqrt{b}. \end{array}$$

$$\sqrt[4]{a^3} \,.\, \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^9} \,.\, \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[12]{a^{17}} = a\sqrt[12]{a^5}.$$

$$3x\sqrt{x} \,.\, 5\sqrt[3]{x^2} \,.\, 2\sqrt[4]{x^3} = 30x\sqrt[12]{x^6 \,.\, x^8 \,.\, x^9} =$$
$$= 30x\sqrt[12]{x^{23}} = 30x^2\sqrt[12]{x^{11}}.$$

Oder, man wende die Bruchpotenzen an, so folgt:

$$3x^{\frac{3}{2}} \,.\, 5x^{\frac{2}{3}} \,.\, 2x^{\frac{3}{4}} = 30x^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = 30x^{\frac{35}{12}} =$$
$$= 30x^{2\frac{11}{12}} = 30x^2 \,.\, x^{\frac{11}{12}} = 30x^2\sqrt[12]{x^{11}}$$

$$a\sqrt[3]{a^{-2}b^2} \times \sqrt[4]{ab^{-3}} \times \sqrt[8]{a^{-5}b^7} = a\sqrt[24]{(a^{-16}b^{16} \,.\, a^6b^{-18} \,.\, a^{-15}b^{21})} =$$
$$= a\sqrt[24]{a^{-25}b^{19}} = \sqrt[24]{a^{24} \,.\, a^{-25}b^{19}} = \sqrt[24]{b^{19} \,.\, a^{-1}} = \sqrt[24]{\frac{b^{19}}{a}}.$$

$$(2\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[4]{b^3}) \times (\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b}) = (2a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{3}{4}}) \times (a^{\frac{1}{2}} - 3b^{\frac{1}{3}})$$
$$= 2a^{\frac{7}{6}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - 6a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 3b^{\frac{13}{12}} =$$
$$= 2a\sqrt[6]{a} - \sqrt[4]{a^2b^3} - 6\sqrt[3]{a^2b} + 3b\sqrt[12]{b}.$$

$$2\sqrt{(3+\sqrt{5})} \times 3\sqrt[4]{(4-\sqrt{5})} = 6\sqrt[4]{[(3+\sqrt{5})^2(4-\sqrt{5})]} =$$
$$= 6\sqrt[4]{(14+6\sqrt{5})(4-\sqrt{5})} = 6\sqrt[4]{(26+10\sqrt{5})}.$$

$$4\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} \times c\sqrt{(a+2\sqrt{b})} = 4c\sqrt[6]{[(a+\sqrt{b})^2 \,.\, (a+2\sqrt{b})^3]} =$$
$$= 4c\sqrt[5]{[(a^2+2a\sqrt{b}+b) \times (a^3+6a^2\sqrt{b}+12ab+8b\sqrt{b})]} \text{ u. s. w.}$$

§. 6. Aufgaben über die Multiplication der Wurzelgrößen.

1) $2\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2}$, $\quad -3\sqrt{a} \,.\, \sqrt{ab}$, $\quad 4a\sqrt[3]{ab} \,.\, \sqrt[3]{a^2b^2}$, $\quad \sqrt[4]{a^3} \,.\, \sqrt[4]{a^3}$.

2) $-\frac{6a}{b}\sqrt[3]{a} \,.\, -\frac{5x}{9}\sqrt[3]{a^2b^2} \,.\, \frac{3a}{5x}\sqrt[3]{b^2}$.

3) $3\sqrt{\frac{(a+b)}{c}} \,.\, -4c\sqrt{(a-b)}$, $\quad -\frac{7}{2}\sqrt{-3} \times 2\sqrt{-1}$.

4) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-6\sqrt{15}) \times -3\sqrt{5}$.

5) $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}) \times \sqrt{bd}$.

6) $(5\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}) \times (\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}-\frac{9}{10}\sqrt[3]{4})$.

7) $(6\sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b}) \times (2\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3})$.

8) $(3\sqrt{-1}+4\sqrt{-3}+7\sqrt{-2}) \,.\, (2\sqrt{-1}-5\sqrt{-2}+2\sqrt{-3})$.

9) $4\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt{2}$, $\quad 3a\sqrt[4]{a^3} \,.\, -\frac{2}{a^2}\sqrt[3]{a^2}$.

10) $-5\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} \,.\, -3\sqrt[6]{\frac{x^5}{y}} \,.\, \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

11) $3\sqrt{\frac{3}{2}} \times -2\sqrt[4]{6} \times -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$.

12) $4\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \times -2\sqrt[4]{a^3b^2} \times -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{a}{b}}$.

13) $(2+3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[4]{4}+3\sqrt{2}) \times -3\sqrt[3]{4}$.

14) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}) \times (\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

15) $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{y^5}) \times (\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y^3})$.

16) $(2\sqrt[3]{4}-4\sqrt[6]{12}+2\sqrt[3]{3}) \times (\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{3})$.

17) $(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[3]{b^2}+\sqrt{c}) \times (\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt{c})$.

18) $\sqrt{(2-\sqrt{2})} \times \sqrt{(2+\sqrt{2})}$, $\quad \sqrt[3]{(a+\sqrt{b})^2} \times \sqrt{(a+\sqrt{b})}$.

19) $\sqrt[4]{(a-\sqrt{b})} \times \sqrt{(a+\sqrt{b})}$, $\quad \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^2} \times \sqrt{(2+\sqrt{3})}$.

§. 7. Division.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$ daher:

Wenn Wurzelgrößen von gleichen Wurzelexponenten getheilt werden sollen, so theilt man die Größen unter dem Wurzelzeichen.

Sind die Exponenten ungleich, so werden sie wieder nach §. 3. b. zuerst gleich gemacht.

Beispiele.

$$\sqrt{a}:\sqrt{a}=1,\quad 2\sqrt[5]{x}:\sqrt[5]{x}=2,\quad \sqrt{-1}:\sqrt{-1}=1.$$

$$b\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[3]{a}=b\sqrt[3]{\frac{a^2}{a}}=b\sqrt[3]{a}.$$

$$3\sqrt[4]{6}:2\sqrt[4]{3}=\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{6}{3}}=\frac{3}{2}\sqrt[4]{2}.$$

$$6\sqrt{-2}:3\sqrt{-1}=6\sqrt{2}\,.\,\sqrt{-1}:3\sqrt{-1}=2\sqrt{2}.$$

$$3\sqrt[3]{a^2b}:4\sqrt{a}=\frac{3}{4}\sqrt[6]{\frac{a^4b^2}{a^3}}=\frac{3}{4}\sqrt[6]{ab^2}.$$

oder $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}:4a^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{6}}=\frac{3}{4}\sqrt[6]{ab^2}.$

$$a:\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[4]{a^4}:\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[4]{a}.$$

$$5:\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{\frac{5^3}{5}}=\sqrt[3]{25}.$$

$$4:\sqrt{-2}=\sqrt{16}:\sqrt{2}\,.\,\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-1}},$$

wird nun Zähler und Nenner mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, so folgt:

$$\frac{\sqrt{8}\,.\,\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{8}\,.\,\sqrt{-1}}{-1}=-2\sqrt{2}\,.\,\sqrt{-1}.$$

$$(2\sqrt{6}+3\sqrt{12}-4\sqrt{3}):-2\sqrt{3}=-\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{4}+2=-1-\sqrt{2}.$$

$$(20\sqrt{-2}+3\sqrt{6}):-2\sqrt{-1}=(20\sqrt{2}.\sqrt{-1}+3\sqrt{6}):-2\sqrt{-1}=$$
$$=-10\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{-1}}=-10\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{6}\,.\,\sqrt{-1}.$$

$$(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[3]{a}):\sqrt[6]{a}=(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{3}}):a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{7}{12}}+a^{\frac{1}{6}}=$$
$$=\sqrt[12]{a^7}+\sqrt[6]{a}.$$

$$(\sqrt[3]{a^2}-4\sqrt{a}):(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[4]{a})=(a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{2}}):(a^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{4}}).$$

Man erhält durch Division:

$$a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{a}-2\sqrt[4]{a}.$$

$$\sqrt[4]{(1-x^2)}:\sqrt{(1-x)}=\sqrt[4]{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}}=\sqrt[4]{\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)^2}}=\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Oder auch

$$=\frac{1}{1-x}\sqrt[4]{(1+x)(1-x)^3}$$

wenn Zähler und Nenner mit $(1-x)^3$ multiplicirt wird.

Rationalmachen des Nenners.

Wenn der Divisor Quadratwurzeln enthält und so beschaffen ist, daß er in den Dividendus nicht getheilt werden kann, so wird die Aufgabe in Bruchform angesetzt und man bringt dann den irrationalen Nenner auf folgende Weise weg:

Man multiplicirt den Zähler und den Nenner des Bruchs mit der Differenz oder Summe der Größen im Nenner, je nachdem dieser aus einer Summe oder Differenz besteht.

Hierdurch entsteht im Nenner die Differenz der Quadrate (nach II. §. 8. b. 4.) und der Nenner wird dann rational.

Beispiele.

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{ab-a\sqrt{c}}{b^2-c}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}+a\sqrt{c}}{b-c}.$$

$$\frac{3}{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}} = \frac{3(2\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+2\sqrt{2})(2\sqrt{5}-2\sqrt{2})} = \frac{3(2\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{3(2\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{20-8} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{-1}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{-1})^2} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{12+1} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{13}$$

Ist der Nenner eine 3 oder 4theilige Größe, so werden 2 Glieder zusammen als ein Theil betrachtet; z. B.:

$$\frac{1}{3+2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2} = \frac{3+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{11+12\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{(3+2\sqrt{5}+3\sqrt{2})(11-12\sqrt{5})}{11^2-(12\sqrt{5})^2}.$$

Wird der Zähler und Nenner ausgerechnet, so folgt:

$$\frac{87+14\sqrt{5}-33\sqrt{2}+36\sqrt{10}}{599}.$$

§. 8. Aufgaben über die Division.

1) $2\sqrt{a} : 3\sqrt{a}$, $\quad 5\sqrt[3]{ab} : \sqrt[3]{b}$, $\quad \frac{2}{3}\sqrt{\frac{ab}{c}} : \frac{2}{9}\sqrt{\frac{a}{bc}}$.

2) $6 : \sqrt{12}$, $\quad 4 : 2\sqrt{-8}$, $\quad a^3b : \sqrt[4]{a^5b^3}$, $\quad 9\sqrt{-2} : 3\sqrt{-3}$.

3) $12\sqrt[3]{4} : 2\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, $\quad 2a^3\sqrt[4]{b^3x} : a^2\sqrt[4]{bx}$.

4) $4\sqrt[3]{\frac{a^2b^3c^4}{3d^2}} : -2b\sqrt[3]{\frac{ac}{3d^5}}$, $\quad 7a\sqrt[4]{\frac{b^3d}{c^3}} : 2\sqrt[4]{\frac{b}{c}}$.

5) $(3+\sqrt{6}-4\sqrt{3}) : -\sqrt{3}$, $\quad (5\sqrt[3]{a^2}-20\sqrt[3]{a^2b^2}) : 5\sqrt[3]{a}$.

6) $3\sqrt[4]{a^3} : -4\sqrt{a}$, $\quad 3\sqrt[6]{27} : \sqrt{3}$, $\quad 5\sqrt{\frac{ab}{cf}} : -\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}}$.

7) $(30\sqrt{-1}+50\sqrt{-2}-8\sqrt{-3}) : -2\sqrt{-1}$.

8) $(6\sqrt[4]{a^3}-4\sqrt[3]{b^2}) : 2\sqrt{ab}$.

9) $(6\sqrt{a}-4\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[4]{a^3}) : 2\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$.

10) $(4\sqrt[3]{x^4}-9\sqrt{y}) : (2\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[4]{y})$.

11) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$, $\quad \frac{a}{b\sqrt{c}+d}$, $\quad \frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.

12) $\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\quad \frac{22}{8+5\sqrt{3}}$, $\quad \frac{31\sqrt{2}}{4\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$.

13) $\frac{3+\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-8\sqrt{\frac{1}{2}}}$,

auf 2 Arten den Nenner rational zu machen, nämlich 1) durch Verwandlung von $\sqrt{\frac{1}{2}}$ in $\sqrt{2}$, und 2) auf die gewöhnliche Weise.

14) $\frac{7\sqrt{3}-6\sqrt{\frac{1}{3}}}{5\sqrt{3}+12\sqrt{\frac{1}{3}}}$, wie Aufgabe 13, auf 2 Arten!

15) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $\quad \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3\sqrt{-2}+2\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}}$.

16) $\frac{1}{3-\sqrt{7}+\sqrt{2}}$, $\quad \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{-1}+5-\sqrt{2}\,.\,\sqrt{-1}}$.

17) $4\sqrt{(4-2\sqrt{2})} : \sqrt[4]{(6-2\sqrt{7})}$, ohne Nenner darzustellen!

Rechnet diese Aufgabe auch durch Wurzelausziehung aus, und vergleichet die Antwort mit dem durch die Wurzelrechnung gefundenen Resultat, welches gleichfalls durch Ausziehung der Wurzel auszurechnen ist. (Siehe Abschnitt **III**. §. 10. *f*)

Fünfter Abschnitt.

Allgemeine Proportionenlehre.

§. 1. Von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

Wenn man zwei *Größen* mit einander *vergleicht*, so findet man das *Verhältniß*, in welchem sie zu einander stehen.

Diese Vergleichung kann auf 2 Arten geschehen; untersucht man nämlich:

1) *um wie viel die eine Größe größer ist als die andere*, so erhält man das *arithmetische Verhältniß*;

unterſucht man aber:

2) *um wie viel mal die eine größer ist als die andere*, oder *wie oft die eine in der andern Größe enthalten ist*, so findet man das *geometrische Verhältniß* der zwei Größen.

Z. B. die 2 Größen 12 und 3.

$12 - 3$ gibt das arithmetische, die *Differenz* ist 9.

$12 : 3$ „ „ geometrische, der *Quotient* ist 4.

Im Allgemeinen läßt sich jedes arithmetische Verhältniß durch $(a + d) - a$ oder $(a + d) \div a$ darstellen, und jedes geometrische durch $aq : a$; man erhält im ersten Fall die *Differenz* d und im 2ten den *Quotienten* q.

Arithmetische *Verhältnisse sind gleich*, wenn sie *gleiche Quotienten* haben.

Werden nun zwei *gleiche* Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbunden, so erhält man eine *Proportion*. Z. B.

$18 \div 14 = 17 \div 13$, die Differenzen sind beide $= 4$,

$a + d \div a = b + d \div b$ die „ „ „ „ $= d$,

sind 2 arithmetische Proportionen.

$12 : 6 = 14 : 7$, beide Quotienten sind $= 2$,

$aq : a = bq : b$, „ „ „ $= q$,

sind 2 geometrische Proportionen.

Man nennt die einzelnen Größen, welche eine Proportion bilden, *Glieder*, und das erste und 4te Glied bilden die *äußeren*, das 2te und 3te die *inneren* Glieder.

Wenn die beiden inneren Glieder gleich sind, so nennt man die Proportion eine *stetige*.

§. 2. Von den arithmetischen Proportionen.

Wenn man in der allgemeinen arithmetischen Proportion:

$$(a + d) \div a = (b + d) \div b$$

die äußeren Glieder addirt, so folgt $a + b + d$; addirt man die inneren Glieder, so erhält man ebenfalls $a + b + d$; hieraus folgt der Satz!

Bei jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder = der Summe der innern.

Man kann nun ein unbekanntes Glied in jeder arithmetischen Proportion auf 2 Arten finden.

Z. B. das 4te oder x sei unbekannt.

$$6a \div 8a + b = 5a \div x.$$

1) Die Differenzen müssen gleich sein, das 2te ist um $2a + b >$ als das erste, daher muß auch das 4te um $2a + b >$ als das 3te sein, folglich

$$x = 5a + 2a + b = 7a + b.$$

2) Muß $6a + x = 8a + 5a + b$ sein, nach dem vorhergehenden Satze;

oder $6a + x = 13a + b$,

wird auf beiden Seiten $6a$ abgezogen, so folgt:

$$x = 7a + b, \text{ wie oben.}$$

Wenn in einer arithmetischen Proportion die 2 mittleren Glieder gleich sind, so nennt man jedes derselben die mittlere arithmetische Proportionale, oder das arithmetische Mittel der beiden äußeren.

Es sei z. B. $a \div b = b \div c$,

so ist: $2b = a + c$, daher $b = \frac{a + c}{2}$.

Das arithmetische Mittel zu zwei Größen wird daher gefunden, wenn man dieselben addirt und halbirt.

§. 3. Geometrische Proportionen.

a) Die allgemeine Form ist: $aq : a = bq : b$.

Das Produkt der äußeren Glieder ist $= abq$

" " " inneren " auch $= abq$

daher ist bei jeder geometrischen Proportion das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der innern.

Wenn in einer geometrischen Proportion irgend ein Glied fehlt, so kann man dasselbe auf zweierlei Arten finden; nämlich: 1) durch Bildung des Quotienten und 2) durch den vorhergehenden Satz.

Z. B. $a^4b^2 : a^3b = x : c^2$.

Erste Auflösung.

Hier ist der Quotient des ersten Verhältnisses = ab, daher muß auch der des 2ten = ab sein, x muß also ab mal größer sein als c^2, daher $x = abc^2$.

Zweite Auflösung.

Es muß $a^3bx = a^4b^2c^2$ sein; mithin, wenn man auf beiden Seiten mit a^3b theilt, $x = \frac{a^4b^2c^2}{a^3b} = abc^2$, wie vorher.

Man kann nach diesem Satze leicht aus zwei Ausdrücken, welche gleich sind, eine Proportion bilden; indem man beide in Faktoren zerlegt, und dann die eine Größe als das Produkt der äußeren, und die andere als das Produkt der inneren Glieder betrachtet, z. B. $ax = bc$, $a : b = c : x$ oder: $b : a = x : c$. Ferner $x = \frac{c^2}{d}$ gibt die Proportion:

$$d : c = c : x, \text{ weil } dx = c^2 \text{ ist.}$$

b) In einer stetigen geometrischen Proportion ist jedes innere Glied gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der beiden äußeren, denn:

$$a : x = x : b, \quad x^2 = ab.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so folgt:

$$x = \sqrt{ab}.$$

Man nennt in diesem Falle x auch die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und b.

c) Anmerkungen.

1) In der Folge werden wir die geometrischen Proportionen kurzweg Proportionen nennen.

2) Man kann die Proportionen auch in der Form anschreiben, daß jedes Verhältniß als ein Bruch geschrieben wird;

z. B. statt $a : b = c : d$ setzt man: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

d) Jede Proportion läßt sich auf 8 verschiedene Arten anschreiben, man kann nämlich die innern Glieder mit einander wechseln, ebenso die äußeren.

Ferner kann man die innern Glieder als äußere und die äußeren als innere ansetzen, weil bei allen diesen Veränderungen die Produkte der inneren und äußeren Glieder immer noch gleich bleiben, wie man leicht durch Multiplication nachweisen kann.

Wenn z. B. die Proportion $a : b = c : d$ gegeben ist, so muß $ad = bc$ sein und man erhält nach dem Vorhergehenden folgende Anschreibarten:

1) a : b = c : d
2) a : c = b : d
3) b : a = d : c
4) b . d = a : c
5) c : a = d : b
6) c : d = a : b
7) d : b = c : a
8) d : c = b : a

Alle 7 veränderte Proportionen sind richtig, weil in allen die Produkte noch **ad** und **bc** sind, und nach der ersten Proportion **ab = cd** ist.

e) Wenn in 2 Proportionen ein und dasselbe gleiche Verhältniß vorkommt, so kann man aus den 2 anderen Verhältnissen eine neue Proportion bilden, z. B.

$$a : b = c : d, \text{ und } f : g = c : d,$$

so verhält sich auch $a : b = f : g$,
denn die 2 Verhältnisse $a : b$ und $f : g$ müssen gleich sein, weil beide = dem Verhältniß $c : d$ sind.

Oder wenn man die Verhältnisse in Bruchform anschreibt (siehe c, 2.):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ und } \frac{f}{g} = \frac{c}{d}; \text{ also auch } \frac{a}{b} = \frac{f}{g},$$

oder $a : b = f : g$.

f) Wenn irgend eine Anzahl gleicher Verhältnisse gegeben ist, so läßt sich aus ihnen folgende Proportion bilden:

Die Summe aller ersten Glieder verhält sich zur Summe aller zweiten, wie irgend ein erstes Glied zum zugehörigen zweiten Gliede. Z. B.

aq : a
bq : b
cq : c
dq : d

$$aq + bq + cq + dq : a + b + c + d = aq : a.$$

Diese Proportion ist richtig, weil der Quotient in beiden Verhältnissen = q ist.

Ebenso kann man 2 derartige Verhältnisse von einander abziehen, z. B.

$$aq - bq : a - b = aq : a.$$

g) In jeder Proportion kann man jedes äußere Glied mit jeder Größe vervielfachen oder theilen, wenn

zugleich ein inneres mit derselben Größe vervielfacht oder getheilt wird.

Z. B. $aq : a = bq : b$, mit c multiplicirt gibt: $acq : ac = bq : b$, Produkte $abcq = abcq$. Oder wenn man z. B. das 2te und 4te der Proportion

$$aq : a = bq : b$$

mit c theilt, so folgt:

$$aq : \frac{a}{c} = bq : \frac{b}{c}, \text{ Produkte } \frac{abq}{c} = \frac{abq}{c}.$$

Hieraus folgt zugleich, daß man auch alle Glieder einer Proportion mit einer und derselben Größe multipliciren oder dividiren darf.

Z. B. $aq : a = bq : b$, mit c dividirt

gibt: $\frac{aq}{c} : \frac{a}{c} = \frac{bq}{c} : \frac{b}{c}$, (Produkte $\frac{aqb}{c^2}$).

h) Wenn man irgend eine Anzahl Proportionen gliedweise mit einander multiplicirt und ebenso eine Proportion in die andere theilt; so entsteht wieder eine richtige Proportion, z. B.

$$aq : a = bq : b$$
$$cr : c = dr : d$$
$$fs : f = gs : g$$
$$\overline{aq \,.\, cr \,.\, fs : acf = bq \,.\, dr \,.\, gs : bdg.}$$

In beiden Verhältnissen ist der Quotient $= qrs$, oder die Produkte sind beide $= abcdfgqrs$, daher ist die Proportion eine richtige.

i) Wenn man alle Glieder einer Proportion in die nämliche Potenz erhebt, oder aus allen die gleiche Wurzel zieht, so entsteht eine neue Proportion. Z. B.

$$aq : a = bq : b, \quad a^n q^n : a^n = b^n q^n : b^n,$$

oder: $\sqrt[n]{aq} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{bq} : \sqrt[n]{b}$,

denn im ersten Falle sind beide Quotienten $= q^n$ und im zweiten beide $= \sqrt[n]{q}$, die 2 Proportionen sind demnach richtig.

k) Aus jeder Proportion läßt sich auf folgende Weise eine andere bilden: Man setzt: Die Summe oder Differenz der 2 ersten Glieder verhält sich zum ersten oder 2ten Gliede, wie die Summe oder Differenz des 3ten und 4ten Gliedes zum 3ten oder 4ten Gliede.

Z. B. $aq : a = bq : b$,

$$aq \pm a : a = bq \pm b : b,$$

denn in beiden Verhältnissen ist der Quotient $= q \pm 1$.

l) Eine weitere Veränderung ist folgende:

Die Summe der 2 ersten Glieder verhält sich zur Differenz dieser Glieder, wie die Summe des 3ten und 4ten zur Differenz derselben Glieder. Z. B.

$$aq : a = bq : b,$$

$$aq + a : aq - a = bq + b : bq - b.$$

Die Quotienten sind: $\frac{aq + a}{aq - a} = \frac{a(q + 1)}{a(q - 1)} = \frac{q + 1}{q - 1}$

und $\frac{bq + b}{bq - b} = \frac{b(q + 1)}{b(q - 1)} = \frac{q + 1}{q - 1}$.

Oder $(aq + a)(bq - b)$ gibt $abq^2 + abq - abq - ab$

und $(aq - a)(bq + b)$ „ $abq^2 - abq + abq - ab$

Die Quotienten sind also gleich und ebenso die Produkte der äußeren und inneren Glieder.

§. 4. Anwendungen der Proportionen.

Die geometrischen Proportionen werden in der Mathematik sehr häufig angewendet.

Die sogenannte Regel de tri (Dreisatz), durch welche viele praktische Rechnungsfragen gelöst werden können, beruht auf der Lehre von den Proportionen; es werden durch diese solche Aufgaben gelöst, bei welchen 2 Größen in demselben oder im umgekehrten Verhältnisse stehen wie zwei andere, von welchen die eine unbekannt ist; hierbei wird der Satz §. 3. *a*, zur Auffindung von x, und der Satz *g* zum Beseitigen der Brüche oder zum Abkürzen der Proportion angewendet. In der Geometrie werden die Proportionen namentlich bei den Sätzen über ähnliche Dreiecke und bei den Proportionallinien im Kreise vielfach angewendet; namentlich die Sätze §. 3. *a*, *b*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i* und *k*.

Es sollen nun noch einige Aufgaben über Proportionen, welche die Anwendungen des §. 3. zeigen, gelöst werden.

1) A hat im vorigen Jahre 1260 und in diesem Jahre 1428 fl. eingenommen, wie groß ist seine Einnahme durchschnittlich für jedes Jahr?

$$1260 \div x = x \div 1428$$

$$2x = 1260 + 1428$$

$$x = \frac{2688}{2} = 1344 \text{ fl.}$$

Oder nach dem allgemeinen Satz §. 2.

$$x = \frac{1260 + 1428}{2} = 1344.$$

2) Wie heißt das arithmetische Mittel der zwei Größen $3a + 2b$ und $5a + 3b$?

Antwort: $\frac{3a + 2b + 5a + 3b}{2} = 4a + 2\frac{1}{2}b.$

3) Wie heißt die mittlere geometrische Proportionale zwischen a^2 und a^4?

Antwort: $a^2 : x = x : a^4$, $x^2 = a^6$, $x = a^3$.

4) Man soll aus folgender Proportion die Größe x finden:

$$ax^3 : bx = cx : 5d.$$

Wird das erste und 2te und dann das erste und 3te Glied durch x getheilt nach §. 3. *g*, so folgt:

$$ax : b = c : 5d, \text{ woraus:}$$

$$5adx = bc, \text{ oder mit } 5ad \text{ getheilt: } x = \frac{bc}{5ad}.$$

5) Löset folgende Proportion ohne Anwendung der Gleichungen auf!

$$3 + x : x = 40 : 34.$$

Nach §. 3. *k* ist: $3 + x - x : x = 40 - 34 : 34.$

Hieraus folgt: $3 : x = 6 : 34$

oder: $3 : x = 3 : 17$, oder $1 : x = 1 : 17$

woraus $x = 17$ folgt.

6) $\sqrt{x} : \sqrt{(x + 5)} = 2 : 3$, x zu finden.

Nach §. 3. *i* ist: $(\sqrt{x})^2 : \sqrt{(x + 5)^2} = 4 : 9$

oder: $x : x + 5 = 4 : 9$

oder: $x + 5 - x : x = 9 - 4 : 4$ nach §. 3. *k*

also: $5 : x = 5 : 4$, woraus $x = 4$ folgt.

7) $x^2 : a^2 = 4b^2 : 3c^3$.

Nach §. 3. *i* ist: $x : a = 2b : \sqrt{3c^3}$

also $x = \frac{2ab}{\sqrt{3c^3}} = \frac{2ab}{c\sqrt{3c}}$ oder $= \frac{2ab}{3c^2}\sqrt{3c}$.

8) Bringet aus folgender Proportion die Brüche weg!

$$\frac{a + x}{b - x} : c = \frac{d}{a} : f.$$

Multipliciret nach §. 3. *g* ein äußeres und ein inneres Glied mit $b - x$ und mit a, so folgt:

$$a + x : c(b - x) = d : af.$$

Oder, wenn man die Verhältnisse als Brüche behandelt:

$$\frac{a + x}{b - x} : c = \frac{a + x}{c(b - x)} \text{ und } \frac{d}{a} : f = \frac{d}{af},$$

mithin: $\frac{a + x}{c(b - x)} = \frac{d}{af}$,

woraus wieder $a + x : c(b - x) = d : af$ folgt.

9) Man soll x aus folgenden Proportionen in a und b ausdrücken:

$$a : c = d : x$$
$$c : b = a^2 : d.$$

Erste Auflösung.

Multipliciret beide Proportionen (§. 3. *h*), so folgt:

$ac : cb = a^2d : dx$, woraus nach §. 3. *g*

$a : b = a^2 : x$ oder: $1 : b = a : x$,

hieraus $x = ab$.

Zweite Auflösung.

Aus I. folgt: $ax = cd$ und aus II. $a^2b = cd$,

folglich ist auch $ax = a^2b$.

Hieraus $x = ab$.

10) Es soll aus den 2 gleichen Größen $\frac{ax}{b} = \frac{cd}{f}$ eine Proportion gebildet werden, in welcher x im 4ten Gliede erscheint.

Nach §. 3. *a* ist: $\frac{a}{b} : c = \frac{d}{f} : x$,

woraus nach §. 3. *g*. $af : bc = d : x$.

Oder, wenn man die gegebenen Brüche in Verhältnißform schreibt:

$$ax : b = cd : f;$$

hieraus $f : cd = b : ax$.

11) Wenn $\frac{ab}{c} = \frac{dg}{h}$, in welchem Verhältniß steht a zu g, (ohne Brüche)?

Nach §. 3. *a* ist $a : g = \frac{d}{h} : \frac{b}{c}$, oder:

$$a : g = dc : bh.$$

12) a Fuße eines Maaßes geben b Fuße eines anderen, wie viel geben d Fuße des ersten im 2ten Maaße?

Antwort: $a : d = b : x$, $ax = bd$, $x = \frac{bd}{a}$.

13) Es seien a, b, c und d Benennungen von verschiedenen Maaßen, Gewichten oder Münzen, und ihre Verhältnisse sind durch folgende Angaben bestimmt, wie verhalten sich a und d?

$$13a = 18b$$
$$5b = 6c$$
$$3c = 4d,$$

Erste Auflösung.

Man erhält nach §. 3. *a* die Proportionen:

$$a : b = 18 : 13 \quad (\text{denn } 13a = 18b)$$
$$b : c = 6 : 5 \quad (\text{„} \quad 5b = 6c)$$
$$c : d = 4 : 3 \quad (\text{„} \quad 3c = 4d).$$

Hieraus folgt nach §. 3. *h*:

$$abc : bcd = 18 . 6 . 4 : 13 . 5 . 3, \text{ oder}$$

nach §. 3. *g* $a : d = 18 . 2 . 4 : 13 . 5$; daher

$$a : d = 144 : 65.$$

Zweite Auflösung.

Multiplicire die 3 Gleichungen, so folgt:

$$13 . 5 . 3abc = 18 . 6 . 4bcd.$$

Wird nun durch 3bc auf beiden Seiten getheilt, so folgt:

$$65a = 144d,$$

hieraus: $a : d = 144 : 65$

Auf dieser Verfahrungsart beruht die sogenannte Kettenregel.

14) Die 2 Größen x und y verhalten sich wie a : b, die zwei Größen z und y aber wie c : d, wie viele Einheiten der Größe x gehen auf n Einheiten der Größe z?

Erste Auflösung.

Man hat: I. $x : y = a : b,$

II. $z : y = c : d,$

kehrt man die 2te Proportion nach §. 3. *d* um, so folgt:

III. $y : z = d : c.$

Multiplicirt man nun I. und III., so ergibt sich:

$$xy : yz = ad : bc \text{ oder nach §. 3. } g$$
$$x : z = ad : bc,$$

woraus $z . ad = x . bc$, oder $z = x . \frac{bc}{ad}$.

Daher $n . z = \frac{n . bc}{ad} x,$

es gehen daher $\frac{n . bc}{ad}$ Einheiten der Größe x auf n Einheiten der Größe z.

Zweite Auflösung.

Wenn die Proportionen in Bruchform geschrieben werden, so folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \text{ und } \frac{z}{y} = \frac{c}{d},$$

daher: $\frac{x}{y} : \frac{z}{y} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$,

oder $x : z = ad : bc$ u. s. w. wie oben.

§. 5. Aufgaben.

1) Suchet das 4te Glied der arithmetischen Proportion
$$a \div 5a = 3a \div x.$$

2) Wie heißt das arithmetische Mittel zwischen **am** und **bm**?

3) Wie groß ist x in der Proportion $ab : a = x : c$?

4) Suchet die mittlere geometrische Proportionale zu **9a** und **4a**!

5) Setzet aus der Angabe, daß $5ax = 7by$ sei, eine Proportion an, in welcher das Verhältniß von x und y angegeben wird!

6) Bildet aus folgenden 2 gleichen Ausdrücken eine Proportion, worin x als mittlere Proportionale erscheint! $ax^2 = b^2c$.

7) Aus $x^2 = a^2 - ax$ eine Proportion zu bilden, in welcher x als mittlere Proportionale und auch zugleich im 4ten Gliede erscheint. (Mittlere und äußere Proportionale, siehe Geometrie I. §. 127.)

8) Wie verhält sich das hessische Malter zum badischen, wenn 1000 heff. = $853\frac{1}{3}$ bad. Malter ist?

9) Wenn **a** Pfunde einer Waare **A** fl. kosten, wie viel Pfunde derselben Waare erhält man für **B** fl.?

10) Wenn **N** Arbeiter **n** Tage brauchen zu einer bestimmten Arbeit, wie viele Tage brauchen **M** Arbeiter zu einer gleichen Arbeit?

11) Bringet aus folgender Proportion die Brüche weg und reduciret dieselbe!
$$3\frac{ab}{2} : \frac{cd}{fn} = \frac{3g}{5h} : \frac{2m}{nh}$$

12) Bildet aus folgender Proportion durch Versetzung der Glieder 7 andere! $2 : 5 = a : x$.

13) Wie wird aus der Proportion $\sqrt{x} : a = \sqrt{b} : c$ eine andere gebildet, welche keine Wurzeln enthält?

14) Ist die Proportion $17 : 51 = 73 : 218$ eine richtige, oder wie viel fehlt dem 4ten Gliede?

15) Suchet aus folgender Proportion eine andere, in welcher x nur in einem Gliede erscheint! $3 + x : 7 - x = 2 : 3$.

16) Wie läßt sich die Proportion $a + x : b - x = c + x : d - x$ umformen, daß x nur in einem Gliede erscheint?

17) Reduciret folgende Proportion und suchet x!
$$a^2b^4 : x^2b^2 = d^2 : \frac{f^6}{a^2}.$$

18) Suchet x aus folgender Proportion, nachdem solche zuerst reducirt worden ist!

$$\sqrt{(x+3)} : \sqrt{(x-2)} = 3 : 2.$$

19) Wenn $a : b = c : d$ und $d : c = x : g$, wie läßt sich x in a, b und g ausdrücken?

20) Wenn $A : a = m : n$, $B : b = m : n$ und $C : c = m : n$, wie verhalten sich die 2 Summen $A + B + C$ und $a + b + c$?

21) Bildet aus $a^2 - b^2 = c^2 - x^2$ eine Proportion, in welcher x in den 2 mittleren Gliedern erscheint!

22) Wie verhält sich m zu q, wenn $am = bn$, $ap = dn$ und $fq = dp$ ist?

23) Findet x aus folgenden Angaben: $x : y = 5 : 6$, $y : 3 = 7 : 12$.

24) Wenn a, b und c beliebige Linien bedeuten und durch x eine gesuchte Linie bezeichnet wird, auf welche Weise findet man x durch Proportion aus folgenden einzelnen Angaben, und wie nennt man x in den verschiedenen Fällen?

1) $x = \frac{ab}{c}$, 2) $x = \frac{b^2}{a}$, 3) $x = \sqrt{ab}$.

Sechster Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 1. Erklärungen.

Im dem vorhergehenden Abschnitte wurden zwei Arten der Vergleichung zweier Größen betrachtet, hier soll nun noch eine dritte gezeigt werden; man kann nämlich auch untersuchen, in welche Potenz man die eine Größe erheben muß, um die andere zu erhalten.

Z. B. $4^x = 64$, hier muß $x = 3$ sein, weil $64 = 4^3$, und $10^x = 10000$, hier ist $x = 4$, weil $10^4 = 10000$.

Man nennt nun den Exponenten, welcher angibt, in welche Potenz man eine Größe erheben muß, um eine andere zu erhalten, den Logarithmus (die Verhältnißzahl) der 2ten Größe in Bezug auf die erste. Es sei z. B.

$$a^n = b,$$

so ist n der Logarithmus von b, oder $n = \log b$. Die Größe a heißt die Basis, oder bei Zahlen die Grundzahl, und b ist die Zahl oder der Numerus (num.).

Wenn man nun für alle Werthe von b die zugehörigen von n sucht, so erhält man das Logarithmensystem der Grundzahl a.

§. 2. Berechnung der Logarithmen.

Die Berechnung des Log. einer Zahl geschieht auf einfache Weise durch Formeln, welche jedoch nur mit Hülfe der höheren Mathematik abgeleitet werden können; auf elementarem Wege läßt sich die Berechnung nur durch sehr weitläufige Quadratwurzelausziehungen ausführen.

Es sei z. B. der $\log 7$ für die Basis 10 zu finden, so hat man unter anderen folgendes Verfahren:

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, also liegt $\log 7$ zwischen 0 und 1, weil 7 zwischen 1 und 10 liegt.

Nimmt man nun das Mittel zwischen 0 und 1, so folgt:

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}1622777\ldots, \text{ ist zu klein,}$$

$\log 7$ liegt daher zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, das Mittel ist $\frac{3}{4}$; daher:

$$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt{\sqrt{10^3}} = \sqrt{(10\sqrt{10})} = \sqrt{31{,}622777} = \\ = 5{,}62341\ldots,$$

$\log 7$ liegt also zwischen $\frac{3}{4}$ und 1, Mittel $\frac{7}{8}$,

$$10^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{10^7} = \sqrt{\sqrt{}} . \sqrt{10^7} = \sqrt{[10\sqrt{(10\sqrt{10})}]} = \\ = \sqrt{10 . 5{,}62341} = 7{,}498\ldots,$$

ist zu groß, man nehme daher das Mittel zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$, so folgt:

$$10^{\frac{13}{16}}, \text{ man findet dann } 6{,}4938,$$

das weitere Mittel ist $\frac{27}{32}$ und $10^{\frac{27}{32}} = 6{,}9783\ldots$

Auf diese Art wird fortgefahren und man findet endlich nach 14 weiteren Versuchen:

$$10^{\frac{443075}{524288}} = 7{,}000003\ldots.$$

Also ungefähr $0{,}8450982 = \log 7\ldots.$

(Der wahre ist $= 0{,}8450980$, man hätte daher noch weitere Versuche nöthig.)

Man findet bei jeder solchen Rechnung zugleich die Log. von anderen Zahlen, z. B. in dem Vorhergehenden ist

$$\log 3{,}1622777 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\log 5{,}62341\ldots = \frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \log 7{,}498\ldots = \frac{7}{8} = 0{,}875 \text{ u. s. w.}$$

Eine jener durch höhere Analysis abgeleiteten Formeln für die Berechnung der Logarithmen ist z. B. folgende:

$$\log(n+x) = \log n + 0{,}868589\left[\frac{x}{2n+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5 + \ldots\right].$$

Durch diese Formel lassen sich die Logarithmen für die Basis 10 berechnen; wenn man nämlich den $\log n$ kennt, so lassen sich die $\log$ von $n+1$, $n+2$, $n+3$ u. s. w. finden; wenn man für x der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 u. s. w. annimmt. Z. B.

$\log 10 = 1$, denn $10^1 = 10$; es sei nun $\log 11$ zu rechnen, so setze $n = 10$. $x = 1$, dann folgt:

$$\log 11 = \log 10 + 0{,}868\ldots\left[\frac{1}{21} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{21}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{21}\right)^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{21}\right)^7 + \ldots\right]$$
$$= 1 + 0{,}868589\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{3.21^3} + \frac{1}{5.21^5} + \frac{1}{7.21^7} + \ldots\right)$$
$$= 1 + 0{,}868589\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{27783} + \frac{1}{20420505} + \ldots\right).$$

Die Glieder in der Klammer nehmen so sehr an Werth ab, daß man nur höchstens die 3 ersten beizubehalten hat; man erhält dann in Decimalbrüchen:

$$\log 11 = 1 + 0{,}868589(0{,}04761905 + 0{,}00003599 + 0{,}00000005)$$
$$= 1 + 0{,}868589 \,.\, 0{,}04765509 = 1{,}0413392686\ldots.$$

In 7stelligen Tafeln findet man $\log 11 = 1{,}0413927$, weil bei Weglassung der 66 die vorhergehende 7te Ziffer 6 um 1 vermehrt wird.

Um nun $\log 12$ zu rechnen setze man entweder: $n = 10$, $x = 2$ u. s. w.; oder man nehme $n = 11$ und $x = 1$, da nun $\log 11$ bekannt ist u. s. w.

Suchet auf diese beiden Arten $\log 12$, so wird die Zahl 1,0791812 folgen.

§. 3. Allgemeine Sätze.

a) Der Log. der Grundzahl ist bei jedem System $= 1$ und der log. von 1 bei jedem $= 0$; denn $a^1 = a$, $\log a = 1$ und $a^0 = 1$, $\log 1 = 0$.

b) Wenn die Grundzahl positiv ist, so sind die Logarithmen negativer Zahlen unmöglich, denn in welche Potenz man auch eine positive Größe erheben mag, sie kann nie eine negative Größe geben.

c) Die Zahl 1 kann nicht als Basis eines Systems angenommen werden, weil 1 in jeder Potenz $= 1$ ist und daher kein log. einer andern Zahl gefunden werden kann.

d) Der log. eines Produkts ist = der Summe der log. der Faktoren.

Beweis.

Man nehme in diesem und den folgenden 3 Fällen a als Basis des Logarithmensystems an.

Es sei $a^m = b$ und $a^n = c$, so ist: $m = \log b$, und $n = \log c$

$$a^m \cdot a^n = bc \quad \text{oder} \quad a^{m+n} = bc,$$

daher $\log bc = m + n$,

oder $\log bc = \log b + \log c$.

Ebenso läßt sich zeigen, daß

$$\log mnp = \log m + \log n + \log p \text{ ist.}$$

e) Der log. eines Bruchs ist gleich dem log. des Zählers weniger dem log. des Nenners.

Beweis.

$a^m = b$, $a^n = c$, so ist $m = \log b$, und $n = \log c$

und $\frac{a^m}{a^n} = \frac{b}{c}$, oder $a^{m-n} = \frac{b}{c}$,

daher $\log \frac{b}{c} = m - n = \log b - \log c$.

f) Der Log. einer Potenz ist gleich dem Exponenten multiplicirt mit dem Log. der Grundgröße.

Beweis.

$$a^m = b, \quad a^{mn} = b^n,$$

daher $\log b^n = mn$

oder $\log b^n = n \cdot \log b$ (weil $m = \log b$ ist).

g) Der Log. einer Wurzelgröße ist gleich dem Log. der Größe unter dem Wurzelzeichen getheilt durch den Wurzelexponenten.

Beweis.

$$a^m = b, \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{b}, \quad \text{daher} \quad \sqrt[n]{b} = a^{\frac{m}{n}},$$

und $\log \sqrt[n]{b} = \frac{m}{n} = \frac{\log b}{n}$.

h) Die Sätze in *d*, *e*, *f* und *g* lassen sich auch kurz auf folgende Weise zusammenfassen:

Die Logarithmen sind die Exponenten gleichnamiger Grundgrößen, es gelten demnach bei der Rechnung mit denselben alle Gesetze, welche für die Exponenten in der Potenzrechnung für Potenzen gleichnamiger Grundgrößen abgeleitet wurden.

§. 4. Ueber Logarithmensysteme überhaupt.

Die Erfindung und erste Berechnung logarithmischer Tafeln verdankt man einem Schottländer Joh. Neper † 1614.

Zu gleicher Zeit erfand ein Deutscher Jobst Burgi ebenfalls die Logarithmen, er zögerte jedoch mit der Herausgabe derselben.

Heinrich Brigg (ein Engländer) berechnete 1624 zuerst die Logarithmen der Zahlen 1 bis 20000 und 90000 bis 100000 und nahm die Basis 10 an.

Adrian Blacq ergänzte sie 1628 durch Einschaltung der log. aller Zahlen von 20000 bis 90000.

Man wendet in der Mathematik zweierlei Systeme von Logarithmen an, nämlich das System der Basis 10 (das sogenannte Briggische oder gemeine), und das System der Basis 2,718281828 ... (wolframsche, hyperbolische oder natürliche). Das 2te wird hauptsächlich in der höheren Mathematik angewendet, und wir werden nur das Briggische System hier betrachten und den Gebrauch desselben zeigen.

Wenn die Logarithmen eines Systems bekannt sind, so lassen sich die eines jeden andern auf einfache Weise durch Multiplication finden. Z. B. es sollen die Logarithmen des Systems, dessen Grundzahl $= 3$ ist, aus denen des Systems 10 berechnet werden.

Der $\log 3$ ist in dem briggischen Systeme $= 0{,}4771213$,

daher $3 = 10^{0{,}4771213}$; es sei nun $3^x = b$,

so ist $3^x = 10^{0{,}4771213x} = b$.

Daher $0{,}4771213x = \log b$ für die Basis 10,

mithin x oder der $\log b$ für die Basis $3 = \dfrac{\log b \text{ (für die Basis 10)}}{0{,}4771213}$

oder $= 2{,}095903 \times \log b$ für die Basis 10.

Man hat daher nur die Log. der Basis 10 mit 2,095903 zu multipliciren, um die Log. derselben Zahlen für die Basis 3 zu erhalten. Z. B. $\log 9$ für Basis 3 ist $= 2{,}095903 \times \log 9$ für Basis 10, oder $= 2{,}095903 \times 0{,}9542425 = 1{,}9999997 \ldots = 2$, da nun $3^2 = 9$ ist, so muß auch $\log 9 = 2$ sein, wenn die Basis 3 angenommen wird.

Man nennt die Zahl, mit welcher man die Log. des natürlichen Systems multipliciren muß, um die Log. irgend eines anderen (künstlichen) Systems zu erhalten, den Modul des Systems.

Die in §. 3. gegebenen Sätze gelten für die Logarithmen aller Systeme, und wir wollen nun zu den besonderen Sätzen des briggischen übergehen.

§. 5. Das Briggische System.

a) Die Logarithmen des Briggischen Systems findet man in vielerlei Logarithmentafeln angegeben, wovon die einen 7, andere 6, oder 5 Decimalstellen der unendlichen Decimalbrüche geben.

Die gebräuchlichsten Tafeln sind die von Vega, und von Callet, welche 7 Decimalstellen angeben, dann die von Hantschl (6 Decim.) und die von Lalande, welche nur 5 Decimalen enthalten.

b) Die Logarithmen aller Zahlen, welche kleiner sind als 10, sind Decimalbrüche ohne Ganze; die Log. von Zahlen, welche größer sind als 10, enthalten Ganze und Decimalbrüche.

Man nennt die Ganzen eines Log. die Kennziffer oder Charakteristik und den Decimalbruch Mantisse oder Anhängsel.

Die meisten Tafeln geben nur die Mantisse und die Kennziffer hat man selbst zu bestimmen; hierzu hat man folgenden Satz:

Die Kennziffer ist um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern des Numerus; denn:

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000 \text{ u. s. w.}$$

Daher liegen die Log. aller einzifferigen Zahlen zwischen 0 und 1, die aller zweizifferigen Zahlen zwischen 1 und 2 u. s. w. Daher hat der Log. einer einzifferigen Zahl 0 Ganze, der einer zweizifferigen 1 Ganzes, der einer n zifferigen $n - 1$ Ganze.

Es folgt hieraus zugleich:

Daß die Zahlen eine Ziffer mehr haben müssen, als die Kennziffer der Logarithmen Einheiten hat.

c) Das Aufschlagen der Log. in den Tafeln, oder, wenn der Log. gegeben ist, das Aufsuchen des zugehörigen Numerus ist in allen Logarithmentafeln in der Einleitung angegeben und wird daher hier übergangen; es soll nur die Einrichtung der sogenannten Proportionaltheile oder der Differenzen hier gezeigt werden.

Wenn eine Zahl, zu welcher man den Log. finden soll, die Grenzen der Tafeln überschreitet, so verfährt man auf folgende Weise:

Es sei z. B. $\log 27148$ in einer kleineren Tafel, welche nur für 4 Ziffern die Log. gibt, zu finden:

Man suche $\log 27140 = 4{,}43361$, nun ist aber
$\log 27150 = 4{,}43377.$

Zwischen beiden liegt 27148, also auch der $\log 27148$ zwischen 4,43361 und 4,43377.

Man wendet nun folgenden Satz an, der aber nur in gewissen Grenzen richtig ist:

Die Differenz der Zahlen **27150** und **27140** (also **10**) verhält sich zur Differenz der Zahlen **27148** und **27140** (oder 8) wie die Differenzen der zu diesen Zahlen gehörigen Logarithmen; daher:

$$10 : 8 = 16 : x, \quad x = 12{,}8 \text{ oder } 13.$$

Man muß daher zu dem Log. von **27140** = **4,43361** in den zwei letzten Ziffern noch **13** addiren, um den Log. von **27148** zu erhalten, dieser ist daher = **4,43374**

Bei größeren Tafeln sind die zuzuzählenden Differenzen für die 6te Ziffer unmittelbar in der Tafel angegeben, für die 7te Ziffer muß man dann die für die 6te geltende Differenz noch mit 10 theilen u. s. w.

Auf dem gleichen Verfahren beruht auch der Gebrauch der Proportionaltheile bei Aufsuchung von Zahlen für Log., welche nicht unmittelbar in den Tafeln enthalten sind.

d) Bei dem Aufsuchen der Logarithmen und dem Rechnen mit denselben kommen noch einige besondere Fälle vor, welche hier behandelt werden sollen:

1) Es sei der Logarithme eines Decimalbruches zu finden, mit welchem keine ganze Zahl verbunden ist.

Z. B. $\log 0{,}007832$.

Man setze $\log 0{,}007832 = \log \frac{7832}{1000000} =$

$= \log 7832 - \log 1000000$ (nach §. 3. *e*)

$= 3{,}8938727 - 6$, folglich, wenn 3 abgezogen wird.

$\log 0{,}007832 = 0{,}8938727 - 3.$

Die Zahl hat vornen 3 Nullen (mit Einrechnung der 0 Ganze) und der Logarithme hat die Kennziffer − **3**.

Ebenso ist $\log 0{,}06 = \log \frac{6}{100} = \log 6 - \log 100$

$= \log 0{,}7781513 - 2.$

Die Zahl hat 2 Nullen und der Log. die negative Kennziffer 2 u. s. w. Hieraus folgt der Satz:

Um den Logarithmus eines Decimalbruches zu finden, suche man die Mantisse wie bei einer ganzen Zahl und setze vor diese 0 Ganze und hinten eine negative Kennziffer von so vielen Einheiten als die Zahl der Nullen des Decimalbruchs angibt (mit Einrechnung der Null Ganze).

Aus diesem Satze folgt ein weiterer, nämlich:

Der Numerus zu einem Log., der eine negative Kennziffer hat, muß vornen so viele Nullen erhal-

ten (mit Einrechnung der Null Ganze), als die negative Kennziffer Einheiten hat.

Z. B. num 0,8938727 — 3 = 0,007832
num 0,7781513 — 2 = 0,06
num zu — 4 = 0,0001
(nämlich num (— 4) = (0,0000000 — 4) = 0,0001;

oder num zu — 4 = $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$ = 0,0001).

2) Ein negativer Logarithmus soll in einen anderen mit positiver Mantisse und negativer Kennziffer verwandelt werden.

Z. B. — **2,0781943.**

Man setze **+ 3** zu und ziehe dann wieder 3 ab, so folgt:

$$\begin{array}{r} +\,3 \qquad -3 \\ -\,2{,}0781943 \\ \hline 0{,}9218057 - 3. \end{array}$$

Man wendet dieses Verfahren dann an, wenn zu einer negativen Mantisse der Numerus gefunden werden soll.

3) Wenn ein größerer Log. von einem kleineren abgezogen werden soll, so setze dem kleineren so viele Ganze zu, daß die Subtraction geschehen kann und setze dann die addirten Ganzen als negative Kennziffer wieder hinten an.

Z. B. von **2,1432789** soll **5,7632481** abgezogen werden.

Setze 4 zu, so folgt: $\left\{\begin{array}{r} 6{,}1432789 - 4 \\ 5{,}7632481 \\ \hline 0{,}3800308 - 4. \end{array}\right.$

Ein anderes Verfahren ist folgendes:

Ziehe den kleineren Log. von dem größeren ab, so wird der Rest negativ und diesen verwandelt man nun nach Nro. 2 in einen Log. mit negativer Kennziffer, z. B. in der vorhergehenden Aufgabe:

$$\begin{array}{r} -\,5{,}7632481 \\ +\,2{,}1432789 \\ \hline \end{array}$$

Rest = — **3,6199692**, addire + 4 — 4, so folgt:

$$\begin{array}{r} +\,4 \qquad -4 \\ -\,3{,}6199692 \\ \hline 0{,}3800308 - 4, \end{array}$$ wie früher.

Das erste Verfahren ist kürzer.

4) Wenn ein Logarithme, der eine negative Kennziffer hat, durch irgend eine Zahl getheilt werden soll; so muß derselbe so verändert werden, daß die negative Kennziffer ohne Rest theilbar wird. Z. B.

(0,7815963 — 1) : 2.

Man setze + 1 — 1 hinzu, so folgt:

(1,7815963 — 2) : 2 = 0,8907981 — 1.

Ferner (0,3187612 — 5) : 4 = (3,3187612 — 8) : 4
= 0,8296903 — 2.

Ein anderes Verfahren ist folgendes:

Verwandle den Log. in einen negativen, theile alsdann und verwandle den Quotienten wieder in eine positive Mantisse mit negativer Kennziffer. Z. B. in der vorhergehenden Aufgabe:

(0.3187612 — 5) : 4 = — 4,6812388 : 4 = — 1,1703097
+ 2 — 2 zugesetzt, gibt: 0,8296903 — 2 wie oben.

Wenn die negative Kennziffer ohne Rest theilbar ist, so ist keine Veränderung nöthig. Z. B.

0,3181965 — 3 : 3 = 0,1060655 — 1.

Anmerkungen.

1) Diese Veränderung geschieht gleichfalls wegen der Auffuchung des num.; der log. erhält dann eine negative Kennziffer und der num. wird alsdann nach Nro. 1 gefunden.

2) Hat ein log. einen negativen Decimalbruch statt der Kennziffer, so wird ein solcher Decimalbruch addirt, daß eine ganze negative Kennziffer entsteht. Z. B. 0,5378492 — 0,8,
man zähle + 0,2 — 0,2 hinzu, so folgt: 0,7378492 — 1.

5) Man kann sich bei den Rechnungen mit Logarithmen, wenn ein Aggregat von mehreren positiven und negativen Logarithmen vorkommt, mit Vortheil der sogenannten dekadischen Ergänzung bedienen, welche man erhält, wenn die Logarithmen von 10 abgezogen werden.

Man denke sich nämlich zu jedem abzuziehenden Log. die Zahl 10 addirt und zuletzt wieder 10 abgezogen (oder die negative Kennziffer — 10 hinten angesetzt), so bleibt der Werth unverändert. Statt die Logarithmen abzuziehen, addirt man dann ihre dekadischen Ergänzungen (welche aus der Tafel durch Abziehen von 10 angeschrieben wurden). Z. B.

+ 7,3768942 — 6,7123148 — 3,1286523 + 4,82.

Setze:
7,3768942
3,2876852 — 10
6,8713477 — 10
4,82
} addirt, gibt:

22,3559271 — 20 = 2,3559271.

Auf die gewöhnliche Weise hätte man erhalten:

+ 7,3768942	— 6,7123148
+ 4,82	— 3,1286523
12,1968942	— 9,8409671

Also 12,1968942 — 9,8409671 = 2,3559271, wie oben.

Suchet nun zur Uebung die Log. zu folgenden gegebenen Zahlen (bei 7stelligen Log.)

1) log 806 = 2,9063350.
2) log 19,83 = 1,2973227.
3) log 51407 = 4,7110223.
4) log 1387690 = 6,1422925.
5) log 0,3179613 = 0,5023743 — 1.
6) log 0,06870793 = 0,8370069 — 2.

Suchet ferner die Zahlen zu folgenden Logarithmen:

1) num log 3,6700602 = 4678.
2) " " 1,3112663 = 20,477.
3) " " 0,6890246 — 1 = 0,48868.
4) " " 0,7690552 — 3 = 0,00587564.
5) " " 8,7920250 = 619476700.
6) " " 2,8250024 = 668,3474. . . .

§. 6. Anwendung der Logarithmen.

In §. 3. *d*, *e*, *f* und *g* sind die vier Grundgesetze angegeben, durch deren Anwendung auf Zahlenrechnungen sehr bedeutende Abkürzungen erzielt werden. Es wird nämlich durch Satz:

d) jede Multiplication in eine Addition,
e) jede Division in eine Subtraction,
f) jede Potenzerhebung in eine einfache Multiplication, und
g) jede Wurzelausziehung in eine einfache Division verwandelt. —

Ferner lassen sich Gleichungen, in denen die unbekannte Größe als Exponent erscheint, durch Anwendung der Logarithmen auflösen (man nennt diese Gleichungen logarithmische).

Die allgemeine Form der logarithmischen Gleichungen ist:

$$a^x = b.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Log., so ergibt sich:

$$x \log a = \log b, \quad \text{woraus } x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Es sollen nun zunächst folgende allgemeine Aufgaben logarithmisch behandelt werden:

1) $\log a^2 b = \log (a^2) + \log b = 2 \log a + \log b.$

2) $\log a^4b^3c = \log(a^4) + \log(b^3) + \log c =$
$= 4 \log a + 3 \log b + \log c.$

3) $\log \frac{a^5}{b^7} = \log(a^5) - \log(b^7) = 5 \log a - 7 \log b.$

4) $\log \sqrt[8]{a^3} = \frac{\log(a^3)}{8} = \frac{3 \log a}{8}$, oder:

$\log \sqrt[8]{a^3} = \log a^{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8} \log a.$

5) $\log \sqrt[3]{\frac{a^2b}{c^2}} = \frac{\log\left(\frac{a^2b}{c^2}\right)}{3} = \frac{2 \log a + \log b - 2 \log c}{3}.$

6) $\log \frac{a^3\sqrt[4]{b}}{c^2\sqrt[6]{x^5y}} = \log(a^3\sqrt[4]{b}) - \log(c^2\sqrt[6]{x^5y}) =$
$= 3\log a + \frac{\log b}{4} - \left(2\log c + \frac{5\log x + \log y}{6}\right)$

7) Wie heißt der num. zu $5 \log a + 3 \log b$?
Antwort: a^5b^3.

8) num zu $2 \log x - 3 \log y = \frac{x^2}{y^3}.$

9) num zu $\frac{8 \log a + 3 \log b - 2 \log c}{7} = \sqrt[7]{\frac{a^8b^3}{c^2}}.$

10) num zu $4 \log a + \frac{4}{5} \log b - 3 \log c - \frac{2}{3} \log d = \frac{a^4.\sqrt[5]{b^4}}{c^3.\sqrt[3]{d^2}}$

11) Löset die Gleichung $ab^x = c^x$ auf!
Hier ist $\log a + x \log b = x \log c$, woraus
$\log a = x(\log c - \log b)$, also $x = \frac{\log a}{\log c - \log b}$

12) Aus der Gleichung $a^{x+1}b^x = c^{2x+3}d^2$ soll x gefunden werden.
Erste Auflösung.

Setze: $(x+1)\log a + x \log b = (2x+3)\log c + 2\log d,$

hieraus: $x\log a + \log a + x\log b = 2x\log c + 3\log c + 2\log d.$
$x(\log a + \log b - 2\log c) = 3\log c + 2\log d - \log a,$

folglich $x = \frac{3\log c + 2\log d - \log a}{\log a + \log b - 2\log c}.$

Zweite Auflösung.

Zerlege die Potenzen wie folgt: $a^x . ab^x = c^{2x} . c^3d^2$;

hieraus durch Division: $\frac{a^x b^x}{c^{2x}} = \frac{c^3 d^2}{a}$, oder:

$$\left(\frac{ab}{c^2}\right)^x = \frac{c^3 d^2}{a}, \qquad x \log\left(\frac{ab}{c^2}\right) = \log\left(\frac{c^3 d^2}{a}\right)$$

folglich $x = \frac{3\log c + 2\log d - \log a}{\log a + \log b - 2\log c}$, wie oben.

Es sollen nun noch folgende Zahlenbeispiele mit Hülfe der Logarithmen ausgerechnet werden, wobei 7stellige Log. angewendet werden (z. B. die von Vega).

1) Das Produkt der 2 Zahlen 987,8 und 7189,65 annähernd zu finden.

Es sei = x, so ist: $\log x = \log 987{,}8 + \log 7189{,}65$

$$\left.\begin{array}{r} \log 987{,}8 = 2{,}9946690 \\ \log 7189{,}65 = 3{,}8567047 \\ 31 \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$\log x = 6{,}8513768, \quad x = \text{num} \log = 7101936, \ldots.$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \hline 22 \\ 18 \\ \hline 40 \end{array}$$

Durch Multiplication findet man 7101936,27.

2) Den Bruch $\frac{9081}{1794500}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r} \log 9081 = 3{,}9581337 \\ \log 1794500 = 6{,}2539435 \end{array}\right\} \text{subtrahirt.}$$

$$\log x = 0{,}7041902 - 3, \text{ daher } x = 0{,}005060462\ldots$$

Siehe §. 5. *d* 3.

Suchet den Decimalbruch auch auf die gewöhnliche Weise durch Division!

3) Den Bruch $\frac{587 \,.\, 3984}{9{,}783 \,.\, 5176{,}3}$ auszurechnen.

Erste Auflösung.

$$\log x = \log 587 + \log 3984 - (\log 9{,}783 + \log 5176{,}3).$$

$$+\left\{\begin{array}{r} 2{,}7686381 \\ 3{,}6003193 \end{array}\right. \qquad -\left\{\begin{array}{r} 0{,}9904721 \\ 3{,}7140194 \end{array}\right.$$

$$+ 6{,}3689574 \qquad - 4{,}7044915 = 1{,}6644659 = \log x.$$

Daher x = num log = 46,18127 . . . .

Zweite Auflösung.

Zählet die dekadischen Ergänzungen der Logarithmen des Nenners zu den Log. des Zählers. Diese Ergänzungen können unmittelbar aus den Tafeln angeschrieben werden, wenn man jede Ziffer des Log. von 9, die letzte aber von 10 abzieht; man erhält dann:

$$\left.\begin{array}{rl} \log 587 = & 2{,}7686381 \\ \log 3983 = & 3{,}6003193 \\ \text{dek. Ergz. } \log 9{,}783 = & 9{,}0095279 - 10 \\ \text{„ „ „ } 5176{,}3 = & 6{,}2859806 - 10 \end{array}\right\} \text{addirt.}$$

$$\log x = 21{,}6644659 - 20 = 1{,}6644659 \text{ u. s. w.}$$

Rechnet dieselbe Aufgabe auch ohne Logarithmen und vergleichet das Resultat mit dem obigen!

4) Suchet annähernd die 14te Potenz von 2,978134!

$$x = 2{,}978134^{14}, \quad \log x = 14 \,.\, \log 2{,}978134.$$

$$\left.\begin{array}{r} \log 2{,}978134 = 0{,}4739393 \\ 44 \\ 6 \end{array}\right\} \text{addirt.}$$

$$0{,}4739443 \text{ mit 14 multiplicirt.}$$

gibt: $\log x = 6{,}6352202$, woraus $x = 4317379$ beinahe.

Anmerkung.

Welche weitläufige Rechnung würde man erhalten, wenn die Potenzerhebung ohne Log. ausgeführt würde!

5) Rechnet den Ausdruck $x = 0{,}9184^{0,12}$ aus!

Erste Auflösung.

$$\log x = 0{,}12 \log 0{,}9184.$$

$$\log 0{,}9184 = 0{,}9630319 - 1$$

$$0{,}12 \quad \text{multiplicirt, gibt:}$$

$$\log x = 0{,}115563828 - 0{,}12$$

Addire nun: $0{,}88 \qquad -0{,}88$ (§. 5. *d* 4 Anm. 2)

$$\log x = 0{,}9955638 \quad - 1. \qquad \text{(28 wird weggelassen)}$$

daher $x = \text{num} \log = 0{,}9898372 \ldots$

Zweite Auflösung.

Setze $0{,}9184^{0,12} = \sqrt[100]{0{,}9184^{12}} = \sqrt[25]{0{,}9184^{3}}$

daher $\log x = \dfrac{3 \log 0{,}9184}{25} = \dfrac{2{,}8890957 - 3}{25}$,

addire nach §. 5. *d* 4, die Zahl 22, so folgt:

$$(24{,}8890957 - 25) : 25 = 0{,}9955638 - 1 = \log x \text{ u. s. w.}$$

6) $x = 190\sqrt[5]{16807}$ auszurechnen.

$$\log x = \log 190 + \frac{\log 16807}{5}.$$

$$\frac{\log 16807}{5} = 0{,}8450980$$

$$\log 190 = 2{,}2787536$$

$$\log x = 3{,}1238516, \text{ daher } x = 1330.$$

7) $x = \sqrt[6]{\frac{1{,}84 \,.\, 0.5968^2}{178{,}25^3}}$ auszurechnen.

$$\log x = (\log 1{,}84 + 2 \log 0{,}5968 - 3 \log 178.25) : 6.$$

$\log 1.84 = 0{,}2648178$ }
$2 \log 0{,}5968 = 1{,}5516576 - 2$ } addirt

$0{,}8164754 - 1$ }
$3 \log 178.25 = 6{,}7530885$ } subtrah.

$0{,}0633869 - 7$, daher, wenn $+5 - 5$ zugesetzt wird, um mit 6 theilen zu können: $\log x = \frac{5{,}0633869 - 12}{6}$.

$$\log x = 0{,}8438978 - 2, \text{ wozu } x = 0{,}0698068.$$

Rechnet diese Aufgabe auch ohne Logarithmen, wobei vorher eine Abkürzung vorgenommen wird; nämlich: $\sqrt[6]{} = \sqrt[3]{\sqrt{}}$, also

$$x = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{1{,}84}} \,.\, \sqrt[3]{0{,}5968}}{\sqrt{178{,}25}}$$ u. s. w. (Siehe Abschn. IV. §. 3. *a.*)

8) Es sei $x = \sqrt[3]{(137{,}8^2 - 4{,}956^4)}$ zu finden.

Man suche zuerst $137{,}8^2$ und dann $4{,}956^4$, da keine vollständige logarithmische Zerlegung möglich ist.

Man erhält dann: $137{,}8^2 = 18988{,}84$ }
und $4{,}956^4 = 603{,}2887$ } subtrah.

folglich: $x = \sqrt[3]{18385{,}5513}$.

$\log 18385{,}5513 = 4{,}2644767$, durch 3 getheilt, gibt:

$\log x = 1{,}4214922$ und $x = 26{,}3932 \ldots.$

Anmerkung.

Man hat zwar auch Logarithmentafeln für die Log. von Summen und Differenzen (von Gauß), sie gewähren jedoch in den meisten Fällen wenig Abkürzungen.

9) Die logarithmische Gleichung $2^x = 16777216$ aufzulösen.
Setze $x \log 2 = \log 16777216$, also:

$$x = \frac{\log 16777216}{\log 2} = \frac{7,2247199}{0,3010300} = \frac{722472}{30103} = 24.$$

Anmerkung.
Man kann diese Division auch mittelst Logarithmen ausführen.

10) Findet x, wenn $5^x . 7^{3-x} = 175^{2x-3}$ gegeben ist.

$$x \log 5 + 3 \log 7 - x \log 7 = 2x \log 175 - 3 \log 175,$$

hieraus $x = \dfrac{-3 \log 7 - 3 \log 175}{\log 5 - \log 7 - 2 \log 175} = \dfrac{-9,2644080}{-4,6322040}$,

also $x = 2.$

Probe. Setze diesen Werth in die Gleichung, so folgt:

$5^2 . 7^{3-2} = 5^2 . 7 = 175$, und 175^{4-3} ist ebenfalls $= 175$.

Andere Auflösung.

Verändere $5^x . 7^{3-x} = 175^{2x-3}$ in: $5^x . 7^3 . 7^{-x} = 175^{2x} . 175^{-3}$;

hieraus $\dfrac{5^x}{7^x . 175^{2x}} = \dfrac{1}{175^3 . 7^3}$, oder $\left(\dfrac{5}{7 . 175^2}\right)^x = \dfrac{1}{(175 . 7)^3}$,

oder $\left(\dfrac{1}{7 . 175 . 35}\right)^x = \dfrac{1}{1225^3}$.

Da nun die Zähler gleich sind (denn $1^x = 1$), so müssen auch die Nenner gleich sein, daher:

$$(1225 . 35)^x = 1225^3, \qquad x = \frac{3 \log 1225}{\log 1225 + \log 35} = 2.$$

§. 7. Aufgaben über die Logarithmen.

1) Rechnet den Briggischen Log. 31 annäherungsweise!
Wenn ferner $\log 30 = 1,4771213$ ist, wie wird der $\log 31$ gefunden?
2) Der Modul der Briggischen Logarithmen ist $= 0,4342945$, wie läßt sich derselbe finden?
3) Warum sind die Mantissen aller Zahlen, welche das 10fache, 100fache u. s. w. einer andern sind, alle gleich der Mantisse der einfachen Zahl?
4) Wie groß ist der Briggische Logarithme von Null?
5) Wenn man irgend eine Zahl, die kleiner als 1 ist, als Basis eines Systems annehmen wollte, so würden die Log. aller Zahlen, welche > 1 sind, negativ. Warum?
6) Verwandelt den negativen Logarithmus $-0,3789$ in einen positiven mit negativer Kennziffer.

7) Theilet den Log. 0,7851496 — 4 durch die Zahl 3!

8) Zerleget folgende Ausdrücke:

$$a)\ \log\frac{ab}{c},\quad b)\ \log\frac{c^2}{4d},\quad c)\ \log\frac{5a^3b^3}{2d^4f^2}.$$

9) Zerleget den Ausdruck $x = \sqrt[4]{\frac{a^3b^2}{c^5}}$ logarithmisch.

10) Wenn $x = f\sqrt[n]{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt[5]{\frac{(a+b)^3}{c^4}}$ ist, wie heißt der Logarithmus von x?

11) Wie heißen die num. zu folgenden Ausdrücken:

$$b\log a,\quad \frac{c\log b}{n},\quad 5\log a + 7\log b,\quad \frac{3\log x - 4\log y}{5}$$

12) Von welchem Ausdruck ist Folgendes der Log.?

$$\log x = \log a - 2\log b + \frac{5}{6}\log c + \frac{3\log d - 8\log f}{6}.$$

13) Rechnet folgende Produkte mit Hülfe der Logarithmen:

a) $7{,}1828 \times 4076{,}1$ und *b)* $0{,}918 \times 4{,}763 \times 859$.

Prüfet die Resultate durch Multiplication!

14) Verwandelt den Bruch $\frac{29187}{539604}$ in einen Decimalbruch!

Prüfet das Resultat durch Division.

15) Den Bruch $\frac{17{,}4 \cdot 387{,}9}{0{,}05541428} = x$, auszurechnen.

Führet die Rechnung auch ohne Logarithmen aus!

16) Rechnet folgende Potenzen mit Hülfe der Logarithmen aus:

a) $12{,}5^2$; *b)* 14^6; *c)* $0{,}4^{15}$; *d)* $3{,}04^{0,7}$; *e)* $\left(\frac{3}{5}\right)^{0,5}$.

17) Rechnet die Aufgaben über die Ausziehung der Quadratwurzel Abschnitt **III.** §. 3. Nro. 3, 4, 5, 7, 9 und 11 mit Hülfe der Logarithmentafeln aus.

18) Suchet die in Abschnitt **III.** §. 7. Nro. 2, 3, 4, 5, 7 und 8 befindlichen Cubikwurzeln mittelst Logarithmen!

19) Findet die Resultate der 2 Aufgaben Nro. 6 und 7 in Abschnitt **III.** §. 11. mit Anwendung der Logarithmen.

20) Welchen Werth hat die Größe $\left(798\frac{3}{4}\right)^{0,591}$?

21) Rechnet folgende Wurzelgrößen:

$$\sqrt[3]{(5{,}087^2 + 0{,}19023^2)} \text{ und } \sqrt[6]{(3 - 0{,}41768^3)}.$$

22) Suchet folgende Produkte:

$$\left(\frac{4069,1}{639430}\right)^2 \times \frac{1100^2}{49} \quad \text{und} \quad \frac{856,43}{158} \times \sqrt[3]{493039,001}.$$

Rechnet die letzten Beispiele auch ohne Logarithmen!

23) Rechnet $\sqrt{3341584} \times \sqrt[3]{\frac{54}{190887,986}}$ und $\frac{\sqrt[3]{1953\frac{1}{8}}}{\sqrt[4]{39,0625}}$.

24) $\frac{10 \,.\, 279^3 \,.\, \sqrt[6]{0.531441}}{0,31^3 \,.\, 90^5}$ und $71,4\sqrt[6]{\left(115^3 - \frac{13,18^4}{5,71^3}\right)}$.

Rechnet das erste Beispiel auch ohne Logarithmen.

25) $x = \sqrt[8]{\frac{56 + \sqrt[3]{2}}{15,9\sqrt{3}}}$, suchet x mit und ohne Logarithmen!

26) Suchet x aus folgenden Gleichungen:

a) $5^x = 0.3879$, *b*) $3^x \,.\, 8^{x-1} = 3$ und

c) $4^{2x-5} \,.\, 0,7^{3-x} = 2^{x-1}$. Prüfet das Resultat!

27) x zu finden aus: $\frac{5,768^x}{3974} = \frac{0,732}{1,98134^x}$.

Siebenter Abschnitt.

Von den Reihen oder Progressionen.

§. 1. Von den Reihen im Allgemeinen.

Eine jede Anzahl von Größen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, nennt man Reihe oder Progression.

Dieses Fortschreiten kann nun entweder ein solches sein, daß die Unterschiede je zweier auf einander folgenden Glieder gleich sind; oder daß je zwei auf einander folgende Glieder gleiche Quotienten haben.

Im ersten Falle heißt die Reihe eine arithmetische, im andern eine geometrische.

Z. B. 1) 1, 4, 7, 10, 13, 16..... ist eine arithmetische Reihe, denn die Differenzen sind alle = 3.

2) 2, 4, 8, 16, 32.... ist eine geometrische Reihe, denn die Quotienten sind = 2.

Je vier auf einander folgende Glieder einer Reihe

bilden eine Proportion und je drei auf einander folgende eine stetige Proportion, und zwar bilden die arithmetischen Reihen arithmetische — und die geometrischen Reihen geometrische Proportionen.

Der Grund hiervon liegt in der Gleichheit der Differenzen oder Quotienten. Siehe Abschn. V. §. 1.

Z. B. 1 ÷ 4 = 7 ÷ 10 = 13 ÷ 16 u. s. w.
oder: 1 ÷ 4 = 4 ÷ 7 = 7 ÷ 10 u. s. w.
und 2 : 4 = 8 : 16 = 32 : 64 u. s. w.
oder: 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 u. s. w.

Man kann daher eine Progression auch eine fortlaufende Proportion nennen.

Eine Progression heißt zunehmend oder steigend (wachsend), wenn jedes folgende Glied größer ist als das vorhergehende; ist aber jedes folgende kleiner, so nennt man die Reihe eine abnehmende oder fallende.

Die beiden obengenannten Reihen sind steigende,
die Reihen 13, 12, 11, 10 . . . . . und 60, 30, 15, $7\frac{1}{2}$ . . . . aber fallende.

Außer den oben genannten beiden Arten von Reihen gibt es noch folgende:

1) Eine Reihe, in welcher die Glieder in der Weise fortschreiten, daß erst die Differenzen der Differenzen der Glieder gleich werden, heißt eine höhere arithmetische Reihe, oder arithmetische Reihe höheren Ranges.

(Im Gegensatz zu diesen nennt man diejenigen Reihen, deren Glieder gleiche Differenzen haben, niedere oder Reihen ersten Rangs.)

Z. B. 1, 4, 9, 16, 25, ... oder die Quadratzahlen
und 1, 8, 27, 64, 125 . . . . oder die Cubikzahlen u. s. w. bilden höhere arithmetische Reihen; denn:

	1,	4,	9,	16,	25,	36 . . . .
1te Differenzreihe	3,	5,	7,	9,	11	
2te „ „	2,	2,	2,	2		
und	1,	8,	27,	64,	125,	216 . . . .
1te Differenzreihe	7,	19,	37,	51,	91	
2te „ „	12,	18,	24,	30		
3te „ „	6,	6,	6			

Die Benennung des Ranges richtet sich nach der Zahl der Differenzreihen. Die obigen Reihen sind z. B. vom 2ten und vom 3ten Range.

2) Eine Reihe, welche durch Multiplication der gleichstelligen Glieder einer arithmetischen und geometrischen Progression entsteht, heißt eine zusammengesetzte Reihe.

Z. B. arithmet. R.	1,	5,	9,	13,	17,	21 . . . .
geometr.	3,	6,	12,	24,	48,	96 . . . .
Zusammenges.	3,	30,	108,	312,	816,	2016 . . . .

§. 2. Von den niederen arithmetischen Reihen.

Wenn man allgemein das erste Glied mit a und die Differenz mit d bezeichnet, so erhält man für die arithmetischen Reihen ersten Ranges folgende allgemeine Form:

$$\underbrace{a}_{1},\quad \underbrace{a+d}_{2},\quad \underbrace{a+2d}_{3},\quad \underbrace{a+3d}_{4}\ \ldots.$$

Wenn d positiv ist, so ist die Reihe eine steigende; ist aber d negativ, so hat man eine fallende Reihe.

Bei allen Reihen sind hauptsächlich folgende zwei Aufgaben zu lösen:

1) Man soll irgend ein Glied, dessen Nummer (oder Stelle) gegeben ist, finden; ohne die vorhergehenden Glieder zu bilden, und:
2) Man soll die Summe irgend einer Anzahl von Gliedern finden, ohne diese Glieder zu bilden.

Wir wollen nun diese zwei Aufgaben lösen.

Jedes Glied einer arithmetischen Reihe besteht aus dem ersten Gliede (a) mehr einer Anzahl von Differenzen (d), welche um 1 kleiner ist als die Nummer des Gliedes; (z. B. das 2te Glied ist $= a+1d$, das 4te $= a+3d$ u. s. w.)

Es sei nun das nte Glied t zu finden, so hat man nach dem Vorigen:

$$\text{I.}\quad t = a+(n-1)d$$

Man nennt t auch das allgemeine (letzte) Glied.

Da jedes Glied um d kleiner ist als das unmittelbar nachfolgende, so wird die Reihe, wenn man bei dem letzten Gliede anfängt, auch auf folgende Weise geschrieben werden können:

$$t,\ t-d,\ t-2d,\ t-3d\ \ldots\ldots\ a+2d,\ a+d,\ a.$$

Bezeichnet man nun die Summe der Reihe (die Summe von n Gliedern) durch s, so erhält man:

$$s = a+(a+d)+(a+2d)+\ldots.+(t-2d)+(t-d)+t$$

und $$s = t+(t-d)+(t-2d)+\ldots.+(a+2d)+(a+d)+a$$

addirt, gibt $2s = (a+t)+(a+t)+(a+t)+\ldots+(a+t)+(a+t)+(a+t)$

Da nun n solche Summen, jede $= a+t$ vorhanden sind, so ist: $2s = n(a+t)$, woraus die Summenformel:

$$\text{II.}\quad s = \frac{n}{2}\left(a+t\right).$$

Hieraus folgt: Die Summe einer arithmetischen Reihe ist = der halben Anzahl der Glieder multiplicirt mit der Summe des ersten und letzten Gliedes.

Setzt man aus I. den Werth von t in die Formel II., so ergibt sich:

$$s = \frac{n}{2}\left(a + a + (n-1)d\right) \text{ oder}$$

$$\text{III.} \quad s = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right].$$

Die 3te Formel kann in dem Falle benutzt werden, wenn man unmittelbar aus dem ersten Glied und der Differenz die Summe einer bestimmten Anzahl von Gliedern finden will, ohne das letzte Glied zu kennen.

Wenn nun von den fünf Größen a, d, n, t und s irgend drei Größen bekannt sind, so lassen sich die zwei anderen mit Hülfe der Formeln I. und II. durch zwei Gleichungen finden.

Wir wollen nun zur Anwendung dieser Formeln übergehen.

Beispiele.

1) Wie heißt das 30te Glied und die Summe von 30 Gliedern einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied = 10 und deren Differenz = 3 ist?

Auflösung.

Hier ist $a = 10$, $d = 3$, $n = 30$, daher:

$$\text{I.} \quad t = 10 + (30-1).3 = 10 + 29.3 = 97 \quad \text{und:}$$

$$\text{II.} \quad s = \frac{30}{2}(10 + 97) = 15 \,.\, 107 = 1605.$$

2) Die Reihe $7,\ 10\frac{1}{2},\ 14,\ 17\frac{1}{2} \ldots\ldots$ hat 100 Glieder, wie heißt das letzte und wie groß ist die Summe der ganzen Reihe?

Auflösung. $a = 7$, $d = 10\frac{1}{2} - 7 = 3\frac{1}{2}$, $n = 100$,

daher $\text{I.} \quad t = 7 + 99 . \frac{7}{2} = 353\frac{1}{2}$,

und $\text{II.} \quad s = \frac{100}{2}\left(7 + 353\frac{1}{2}\right) = 50 . 360\frac{1}{2} = 18025.$

3) Wie heißt das 19te Glied der Reihe:

$47,\ 46\frac{2}{5},\ 45\frac{4}{5} \ldots\ldots\ldots$, welche 126 Glieder hat, und wie groß ist die Summe der ganzen Reihe?

Auflösung. Hier ist $a = 47$, $d = 46\frac{2}{5} - 47 = -\frac{3}{5}$,

$n = 19$, daher $\text{I.} \quad t = 47 + 18 . -\frac{3}{5} = 36\frac{1}{5}$.

Um nun die Summe der ganzen Reihe zu finden, setze man $n = 126$, und suche zuerst das 126te Glied, so folgt:

$$t = 47 + 125 \cdot -\frac{3}{5} = -28,$$

daher: $$s = \frac{126}{2}(47 - 28) = 63 \cdot 19 = 1197.$$

Oder man benutze Formel III. und suche s unmittelbar aus a, d und n; so folgt: $s = \frac{126}{2}\left(2 \cdot 47 + 125 \cdot -\frac{3}{5}\right)$,

$s = 63 \cdot 19 = 1197$, wie vorhin.

4) Leitet eine allgemeine Formel ab, durch welche n gefunden werden kann, wenn a, d und s gegeben sind.

Auflösung. III. $s = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right)$, hieraus:

$2s = 2an + n^2d - nd$, oder $n^2 + \frac{2a - d}{d} n = \frac{2s}{d}$, woraus

man zuletzt: $n = \frac{d - 2a}{2d} \pm \sqrt{\frac{(d - 2a)^2 + 8s^2d}{4d^2}}$

oder $n = \frac{1}{2d}\left[d - 2a \pm \sqrt{(d - 2a)^2 + 8s^2d}\right]$ erhält.

5) Wenn t, n und d gegeben sind, welche Formeln erhält man für a und s?

I.) $t = a + (n-1)d$, II.) $s = \frac{n}{2}(a + t)$.

Aus diesen 2 Gleichungen muß a und s gefunden werden; aus I. folgt: $a = t - (n-1)d$, in II. gesetzt, gibt:

$$s = \frac{n}{2}\left(2t - (n-1)d\right).$$

6) Das 10te Glied einer arithmetischen Reihe ist = 6463, das 19te = 5834; wenn nun die Reihe 28 Glieder hat, wie heißt das erste, die Differenz, das letzte Glied und die Summe?

Auflösung. Das 10te Glied: $a + 9d = 6463$

" 19te " $a + 18d = 5734$

hieraus durch Subtraction $9d = -629$,

folglich: $d = -\frac{629}{9}$, und $a = 7092$,

daher: $t = 7092 + 27 \cdot -\frac{629}{9} = 5205$, $s = 172158$.

7) Man hat beobachtet, daß die Wärme des Erdkörpers für je 120 Fuß, welche man tiefer in die Erde eindringt, um einen Grad des Reaumür'schen Thermometers zunimmt; wenn nun in einer Tiefe von 100 Fuß die Wärme in einem Schachte 9 Grade beträgt; wie tief liegt ein Punkt des Schachtes, an welchem die Wärme 29 Grade beträgt? In welcher Tiefe würde man ferner die Siedhitze oder 80 Grade antreffen?

Auflösung. Das erste Glied ist $= 100$, die Differenz $= 120$ und da das letzte Glied für eine Wärme gilt, welche um 20 Grade $(29 - 9)$ größer ist als die für das erste Glied, so ist die gesuchte Tiefe das 21te Glied, also $n = 21$; daher t oder die Tiefe $= 100 + (21 - 1)\,120 = 2500$ Fuß.

Die Tiefe, bei welcher 80 Grad Wärme statt finden, muß $= 100 + 71 \,.\, 120 = 8620$ Fuß sein.

(Denn diese Tiefe bildet das 72te Glied.)

8) Jeder freifallende Körper legt im luftleeren Raume in der ersten Secunde 16,35 Fuß (neubadisches Maaß) und in jeder folgenden $2 \,.\, 16{,}35$ Fuß mehr zurück als in der vorhergehenden; wie viele Fuß wird nun ein Körper in der 10ten Secunde zurücklegen und wie tief fällt er in 10 Secunden im Ganzen?

Auflösung. Die Fallräume der einzelnen Secunden bilden eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied $= 16{,}35$ und deren Differenz $= 2 \,.\, 16{,}35$ ist und die geforderte Fallhöhe der 10ten Secunde ist das 10te Glied dieser Reihe;

folglich: $t = 16{,}35 + 9 \,.\, 2 \,.\, 16{,}35$

$t = 19 \,.\, 16{,}35 = 310{,}65$ Fuß.

Die ganze Fallhöhe ist aber $= s = \frac{10}{2}\left(16{,}35 + 310{,}65\right)$, oder 1635 Fuß.

9) Eine allgemeine Formel für die Fallhöhe eines freifallenden Körpers abzuleiten, wenn die Fallzeit $= n$ Secunden ist.

Auflösung. Man setze die Zahl $16{,}35 = g$, so ist die Reihe der Fallräume der einzelnen Secunden folgende:

$$g,\ g + 2g,\ g + 4g \ldots;\ \text{oder}\ g,\ 3g,\ 5g \ldots;$$

das nte Glied, oder der Fallraum für die nte Secunde ist daher

$$= g + (n - 1)2g$$

oder: $t = (2n - 1)g$.

Die ganze Fallhöhe aber beträgt:

$$s = \frac{n}{2}\left(g + (2n - 1)g\right) = n^2 g.$$

Man multiplicirt daher die Zahl der Secunden mit sich selbst und dann mit **16,35**, um die ganze Fallhöhe zu erhalten.

10) Ein Spieler setzt auf das **Roulette** immer auf eine bestimmte Nummer, wenn nun die Kugel auf die besetzte Nummer fällt, so erhält er den 36fachen Einsatz. Derselbe setzte zuerst 1 fl., dann 3 fl., dann 5 fl. u. s. w., bis die besetzte Nummer erscheint. Wenn er nun sein Geld zurückzieht und findet, daß er 1224 fl. gewonnen hat, wie oft hat er gesetzt, bis er gewann?

Auflösung. Er habe nmal gesetzt, so hat er das letzte mal $1 + (n-1) . 2 = 2n - 1$ fl. gesetzt, also erhielt er $36(2n-1)$ fl.; seine Einsätze zusammen betragen aber:

$$s = \frac{n}{2}\left(1 + 2n - 1\right) = n^2 \text{ fl.}$$

folglich $n^2 + 1224 = 36(2n - 1)$.

Hieraus $n = 30$ oder $= 42$.

Er hat daher entweder 30mal, oder 42mal gesetzt, bis er gewann.

Beide Werthe sind richtig, denn:

Wenn er 30mal setzt, so beträgt der letzte Einsatz 59 fl., also sein Gewinn 59 . 36 = 2124; seine Einlagen aber sind zusammen:

$$= \frac{30}{2}\left(1 + 59\right) = 15 \,.\, 60 = 900.$$

Er hat also einen reinen Gewinn von 2124 — 900 oder 1224 fl.

Im 2ten Falle setzt er zuletzt 83 fl., gewinnt also 36 . 83 = 2988, und da er $\frac{42}{2}\left(1 + 83\right) = 1764$ fl. im Ganzen setzte, so ist der reine Gewinn $= 2988 - 1764 = 1224$ fl.

§. 3. Aufgaben über arithmetische Reihen.

1) Wie heißt das 18te und wie das 37te Glied der Reihe **5, 7, 9, 11 . . . .**?

2) Wenn die Reihe $79a$, $77\frac{8}{9}a$, $76\frac{7}{9}a$ . . . . . 28 Glieder hat, wie heißt das letzte Glied derselben?

3) Das 30te Glied einer Reihe heißt 308, das 19te aber 304, wie heißt die Differenz und das erste?

4) Wenn das erste Glied = **50** und das 3te = **62**, wie groß ist das 100te Glied?

5) In der obersten Reihe einer Dachfläche liegen 74 Ziegel, in jeder folgenden 2 mehr, wie viele liegen in der untersten, wenn das Dach 36 Reihen Ziegel hat?

6) Wie groß ist der Fallraum eines Körpers in der 12ten Secunde? (Siehe Erklärung zu Aufg. 8.)

7) Zwischen die zwei Zahlen 40 und 1008 sollen 120 Zahlen eingeschaltet (interpolirt) werden, so daß eine arithmetische Reihe von 122 Gliedern entsteht; wie heißt diese?

8) Eine Person erspart sich im ersten Jahre 24 fl. und in jedem folgenden 3 fl. mehr, in welchem Jahre wird dieselbe 84 fl. ersparen?

9) Wie groß ist die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000?

10) Wie groß ist das letzte Glied und die Summe der Reihe 30, $32\frac{1}{2}$, 35......; wenn diese 49 Glieder hat?

11) Wie viele Ziegeln liegen in der ganzen Dachfläche, von welcher in Nro. 5 die Rede war?

12) Wie viel erspart eine Person in 30 Jahren, wenn sie im ersten Jahre 70 fl., und in jedem folgenden 10 fl. mehr zurücklegt? (ohne Zinsen).

13) Wenn für das Bohren eines artesischen Bronnens für den ersten Fuß Tiefe 1 fl. 30 kr. und für jeden folgenden Fuß 2 kr. mehr bezahlt werden sollen; was kostet ein solcher Brunnen von 416 Fuß Tiefe?

14) Ein Beamter hat seit 15 Jahren jedes Jahr eine Zulage von 50 fl. erhalten und hat nun 1800 fl. Besoldung; wie groß war sein Gehalt vor 15 Jahren und wie viel Besoldung bezog er in allen 15 Jahren zusammen?

15) Ein Körper wird mit einer solchen Kraft senkrecht in die Höhe geworfen, daß er in der ersten Secunde 327 Fuß zurücklegt; in der zweiten steigt er aber um **2 . 16,35** weniger als in der ersten u. s. w. (wegen der Anziehung der Erde, siehe Aufg. 8), in welcher Secunde wird er den höchsten Punkt erreicht haben (d. h. nicht mehr steigen)?

16) Ein Körper wird mit einer solchen Kraft senkrecht abwärts geworfen, daß er in jeder Secunde 200 Fuß zurücklegen würde; diese Fallhöhe wird aber noch durch die Schwere in der ersten Secunde um **16,35** größer und in jeder folgenden um **2 . 16.35** Fuß größer als in der vorhergehenden; wie tief fällt der Körper in 7 Secunden?

17) Bei einem Wettrennen erhält derjenige Reiter, welcher das Ziel zuerst erreicht 200 fl., jeder folgende bis zum 12ten aber 10 fl. weniger; wie viel erhält der 12te, und wie groß ist die ganze Summe, welche vertheilt wurde?

18) Ein dreieckiges Stück Feld ist mit Bäumen besetzt; in dem vorderen Eck steht 1 Baum, in der gegenüberliegenden Seite sind 45 Bäume, wenn nun in jeder Reihe 2 Bäume mehr stehen als in der vorhergehenden; wie viele Reihen enthält dasselbe und wie viele stehen im ganzen Stück?

19) Leitet eine Formel her, durch welche man das letzte Glied einer Reihe finden kann, wenn der Unterschied, die Anzahl und die Summe der Glieder gegeben ist!

20) Suchet eine Formel für die Differenz und die Summe der Glieder, wenn das erste, die Anzahl und das letzte Glied gegeben sind!

21) Wie groß ist die Differenz, wenn man a, t und s kennt?

22) Das 10te Glied ist = **813**, das letzte = **1823**, die Summe = **141303**; wie heißt das erste, die Differenz und die Anzahl der Glieder?

23) Die Summe des 8ten und 14ten Gliedes einer Reihe ist = **44**, die Summe des 15ten und 19ten = **68**; wie heißt diese Reihe?

24) Ein Reisender legt am ersten Tag 2 Meilen und jeden folgenden ½ Meile mehr zurück als am vorhergehenden Tage; nach wie vielen Tagen wird er einen Ort erreichen, welcher 49½ Meilen entfernt ist?

25) Ein Capital wird jährlich durch Zinszuwachs um 50 fl. größer (die Zinsen werden jedoch nicht wieder verzinst), am Ende des 9ten Jahres beträgt dasselbe sammt Zinsen 1450 fl.; man soll nun mit Hülfe einer arithmetischen Progression das Capital und die Procente finden, zu welchem es ausgeliehen war.

26) Aus den Sterbetabellen einer Gemeinde folgt, daß seit einer gewissen Reihe von Jahren jedes Jahr 5 Menschen mehr gestorben sind als im vorhergehenden Jahre. Wenn nun in dem letzten Jahre 249 und in dem ganzen Zeitraume 2265 Menschen gestorben sind; wie viele starben im ersten Jahre und wie groß ist der Zeitraum?

27) Zwei arithmetische Reihen von 31 Gliedern wurden gliedweise zusammengezählt, wodurch eine neue arithmetische Reihe entstand, deren Differenz = **7** ist, das erste Glied der 2ten Reihe war um 2 größer als das erste Glied der ersten; das 9te Glied der ersten = **17** und die Summe beider Reihen (oder die Summe der durch die Addition entstandenen Reihe) war = **3379**; wie heißen die 2 Reihen?

28) Ein Courier reist mit einer Geschwindigkeit von 10 Meilen täglich von einem Orte **A** nach einem Orte **B** ab, welcher 150 Meilen von **A** entfernt ist. Zwei Tage nach seiner Abreise wird ihm ein anderer von einem Orte **C** aus nachgeschickt, welcher noch 7 Meilen weiter rückwärts liegt als **A**, und dieser legt den ersten Tag 9 und jeden folgenden 1¼ Meile mehr zurück als den vorhergehenden; nach wie vielen Tagen holt er den ersten ein und wie weit liegt der Ort des Zusammentreffens vom Orte **B**?

29) Die Längen der Seiten von 4 Quadraten (in Fußen ausgedrückt) bilden eine arithmetische Progression, deren Summe = **84** ist, die 4 Quadrate zusammen haben 1784 Quadratfuß Inhalt; wie groß sind die Seiten derselben?

30) Beweiset, daß die Summe einer jeder Progression, welche eine ungerade Anzahl Glieder hat, = dem mittleren Gliede mal der Anzahl der Glieder ist!

31) Auf welche Weise läßt sich die Formel für t aus der Formel **III.** für s finden?

32) Man soll die Zahl 1000 in eine Anzahl solcher Theile theilen, daß jeder folgende um 2 größer ist als der vorhergehende und der letzte soll = **60** sein; wie groß muß der erste Theil werden, und wie viele Theile gibt es?

33) Wie groß dürfte der größte Theil (statt 60) mindestens genommen werden; wenn die Aufgabe 32 bei den übrigen Annahmen möglich werden soll?

34) Eine 5 zifferige Zahl hat folgende Eigenschaften:

1) Die Ziffern bilden der Reihe nach von der ersten anfangend eine steigende arithmetische Progression, deren Summe 823 mal kleiner ist als die gesuchte Zahl.

2) Werden die Ziffern verkehrt angeschrieben; so wird die Zahl um 41976 größer als vorher. Welches ist die Zahl?

§. 4. Von den geometrischen Reihen.

Bezeichnet man wieder das erste Glied mit **a**, die Anzahl der Glieder mit **n**, das letzte Glied (oder das **n** te) mit **t** und die Summe durch **s**, ferner die Größe, durch deren Multiplication mit irgend einem Gliede das folgende gefunden wird (den Quotienten oder Exponenten), mit **q**; so erhält man als allgemeine geometrische Reihe folgende:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a, & aq, & aq^2, & aq^3 \ldots\ldots \end{matrix}$$

Jedes Glied besteht aus dem Produkte von **a** mit einer Potenz von **q**, deren Exponent um **1** kleiner ist als die Nummer des Gliedes, (das erste ist $= a \,.\, q^0$), das **12**te Glied z. B. wird daher $= aq^{11}$ und das **n** te Glied $= aq^{n-1}$ sein, mithin:

$$\text{I.)} \quad t = aq^{n-1}.$$

Um nun noch die Summenformel zu finden, multiplicire man die ganze Reihe mit **q**, so erhält man $s \,.\, q$, und ziehe dann die anfängliche Reihe von dieser ab;

also: $$sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots\ldots aq^n$$
$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots aq^{n-1}$$

Beim Abziehen fällt nun jedes Glied der oberen Reihe gegen das folgende der unteren weg, es bleibt von der oberen nur noch aq^n und von der unteren **a** übrig; mithin: $sq - s = aq^n - a$ oder $s(q-1) = aq^n - a$; hieraus die Summenformel:

$$\text{II.)} \quad s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Aus dieser folgt eine weitere Formel für **s**, wenn man den Werth von **t** einführt, nämlich:

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{aq^{n-1}.\, q - a}{q - 1} = \frac{t \,.\, q - a}{q - 1}.$$

(Oder aq^n kam daher, daß man das letzte Glied in der vorhergehenden Herleitung mit q multiplicirte, daher ist $aq^n = t \cdot q$).

Man hat daher: III.) $s = \frac{tq - a}{q - 1}$.

Eine andere Ableitung der Summenformel III. ist folgende:

Man bilde aus je 2 auf einander folgenden Gliedern ein geometrisches Verhältniß, und summire dann die Verhältnisse.

Die Summe der ersten Glieder verhält sich zur Summe der 2ten wie ein erstes zum zugehörigen zweiten (siehe Abschnitt V. §. 3. *f*).

$$\left.\begin{array}{c} a : aq \\ aq : aq^2 \\ aq^2 : aq^3 \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \\ aq^{n-2} : aq^{n-1} \end{array}\right\}$$

Die Summe aller ersten Glieder ist $= s - t$, (weil aq^{n-2} das $n - 1$te Glied ist, das letzte also fehlt).

Die Summe aller 2ten ist $= s - a$ (weil das erste Glied fehlt);

Daher: $s - t : s - a = a : aq$ oder $1 : q$, hieraus:

$(s - t)q = s - a$, $sq - tq = s - a$, $sq - s = tq - a$ und $s(q - 1) = tq - a$, woraus:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}. \text{ (Siehe Formel III.)}$$

Auch bei den geometrischen Reihen lassen sich, wenn von den 5 Größen a, q, n, t und s drei bekannt sind, die 2 fehlenden finden und wir wollen nun die Anwendung der Formeln I., II. und III. an einigen Aufgaben zeigen.

1) Wie heißt das 12te Glied der Reihe:

$$1, 2, 4, 8 \ldots\ldots\ldots$$

Antw.: I.) $t = 1 \cdot 2^{11}$, denn a ist $= 1$, $q = 2$ und $n = 12$ also $t = 2^{11} = 2048$.

2) Wie groß sind die 12 Glieder der vorhergehenden Reihe zusammengenommen?

1te Aufl. Setze in Formel II. $a = 1$, $q = 2$, $n = 12$, so folgt: $s = \frac{1 \cdot (2^{12} - 1)}{2 - 1} = 2^{12} - 1 = 4095$.

2te Aufl. Setze in Formel II. $a = 1$, $q = 2$, $t = 2048$, so folgt: $s = \frac{2048 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 4096 - 1 = 4095$.

3) Wie heißt das 10te Glied und die Summe der Reihe:

$$4,\ 5,\ \frac{25}{4},\ \frac{125}{16}\ \ldots\ldots$$

Aufl. Hier ist $a = 4$, $q = \frac{5}{4}$, $n = 10$, mithin nach

Formel I. $t = 4 \,.\, \left(\frac{5}{4}\right)^9 = \frac{4\,.\,5^9}{4^9} = \frac{5^9}{4^8} = \frac{1953125}{65536}$,

und (nach Formel III.) $s = \dfrac{\frac{1953125}{65536} \,.\, \frac{5}{4} - 4}{\frac{5}{4} - 1} =$

$$s = \left(\frac{9765625}{262144} - 4\right) : \frac{1}{4} = \frac{8717049}{262144} \,.\, 4 =$$

$$s = \frac{8717049}{65536},$$ u. s. w.

Anmerkung.

Man bedient sich bei den Ausrechnungen der Zahlenausdrücke der Logarithmen, namentlich wenn hohe Potenzen oder große Zahlen darin vorkommen. Z. B. in der vorhergehenden Aufgabe: $t = 4 \,.\, \left(\frac{5}{4}\right)^9$.

log 5 = 0,6989700		subtrah.
log 4 = 0,6020600		
0,0969100		multip.
9		
0,8721900		addirt
log 4 = 0,6020600		
log t = 1,4742500 .		daher:

t = num. log = 29,80231 . . . . . .

Dieser Werth stimmt mit $\frac{1953125}{65536}$ überein, denn:

log 1953125 = 6,2907300	subtrah.
log 65536 = 4,8164799	
log t = 1,4742501	

4) Eine Formel für die Summe einer unendlichen abnehmenden Progression zu finden.

Auflösung.

Der Quotient q ist hier ein ächter Bruch oder ein Decimalbruch,

man kann aber jeden ächten Bruch auf die Form $\frac{1}{p}$ bringen, wenn man Zähler und Nenner durch den Zähler theilt, wobei $p > 1$ ist. Man hat daher: $t = a \,.\, q^{n-1} = a \,.\, \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} =$

$$t = \frac{a \,.\, 1^{n-1}}{p^{n-1}} = \frac{a}{p^{n-1}},$$

wenn nun $n = \infty$ groß ist, so ist auch $n - 1 = \infty$

und $t = \frac{a}{p^{\infty}} = \frac{a}{\infty} = 0$;

das letzte Glied ist daher $= 0$ und die Summe (nach Formel **III**.):

$$s = \frac{0 \,.\, q - a}{q - 1} = \frac{-a}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}.$$

Die Summe einer unendlichen abnehmenden geometrischen Reihe ist daher = dem ersten Gliede getheilt durch die Differenz zwischen 1 und dem Quotienten.

Z. B. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$t = \frac{1}{2^{\infty-1}} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0, \quad s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Man kann sich von der Richtigkeit dieser Summe auf folgende Weise überzeugen: Addirt man z. B. das erste und 2te Glied, so folgt $1\frac{1}{2}$, dieser Summe fehlt noch $\frac{1}{2}$, um $= 2$ zu werden, also fehlt noch eine Größe = dem 2ten Gliede; nimmt man nun ferner die Summe der 3 ersten Glieder, so folgt $1\frac{3}{4}$, hier fehlt noch $\frac{1}{4}$ bis zu 2, also fehlt wieder eine Größe = dem 3ten oder demjenigen Gliede, bis zu welchem die Summe genommen wurde u. s. w. Nimmt man nun die Summe aller Glieder bis zum letzten, so fehlt zu 2 noch das letzte oder 0, daher muß die Summe = 2 sein.

5) Findet das nte Glied und die Summe von n Gliedern der Reihe $a, b, \frac{b^2}{a} \ldots\ldots\ldots$;

$$t = a \,.\, \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}, \text{ und } s = \frac{a\left(\frac{b^n}{a^n} - 1\right)}{\frac{b}{a} - 1} =$$

$$s = \frac{a(b^n - a^n)}{a^n} : \frac{b - a}{a} = \frac{a(b^n - a^n)}{a^n} \,.\, \frac{a}{b - a} =$$

$$= \frac{b^n - a^n}{a^{n-2}(b - a)}, \text{ oder auch } = \frac{a^n - b^n}{a^{n-2}(a - b)}.$$

Wenn man mit dem Nenner in den Zähler theilt, so findet man die Reihe wieder, z. B.

$$(a^n - b^n) : (a^{n-1} - a^{n-2}b) = a + b + \frac{b^2}{a} + \ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l} a^n - a^{n-1}b \\ - \quad + \\ \hline \quad a^{n-1}b - b^n \\ \quad a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 \\ \quad - \quad\quad + \\ \hline \quad\quad a^{n-2}b^2 - b^n \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Man kann daher die Reihe durch Division wieder finden, wenn die Summe gegeben ist.

6) Zwischen den 2 Zahlen 10 und 20 sollen 7 weitere Zahlen so eingeschaltet (interpolirt) werden, daß eine geometrische Reihe von 9 Gliedern entsteht, wie heißt der Quotient derselben?

Auflösung. $a = 10$, $t = 20$, $n = 9$, folglich:

$$20 = 10 \,.\, q^8, \qquad q^8 = 2, \qquad q = \sqrt[8]{2}.$$

Man findet nun durch dreimalige Ausziehung der Quadratwurzel (siehe Abschn. III. §. 10. *g*) oder durch Logarithmen:

$$q = 1{,}090507 \ldots : \ldots$$

7) Suchet eine Formel für den Quotienten; wenn das erste und letzte Glied und die Summe gegeben sind!

Auflösung. Formel III. $s = \frac{tq - a}{q - 1}$, hieraus:

$$sq - s = tq - a, \quad q(s - t) = s - a, \text{ daher: } q = \frac{s - a}{s - t}.$$

8) Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist $= 4$, das letzte $= 1073741824$, der Quotient $= 2$; wie viele Glieder hat die Reihe?

Auflösung. $1073741824 = 4 \,.\, 2^{n-1}$, oder:

$$2^{n-1} = 268435456, \text{ daher } (n - 1)\log 2 = \log 268435456,$$

$$n - 1 = \frac{8{,}4288399}{0{,}3010300} = \frac{842884}{30103} = 28,$$

also $n = 29$.

9) Suchet eine allgemeine Formel, durch welche q gefunden werden kann, wenn a, s und n gegeben sind!

Auflösung. Nach Formel II. ist $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$,

daher $qs - s = aq^n - a$, $-aq^n + qs = s - a$,

oder $$q^n - \frac{s}{a} q + \frac{s-a}{a} = 0.$$

Dies ist eine höhere Gleichung, sobald $n > 2$ ist.

Es sei nun z. B. $s = 10000$, $a = 50$ und $n = 10$, so folgt die Gleichung:

$$q^{10} - \frac{10000}{50} q + \frac{10000 - 50}{50} \text{ oder: } q^{10} - 200q + 199 = 0.$$

10) Wenn ein Lichtstrahl durch eine bestimmte Glasscheibe dringt, so verliert er $\frac{1}{5}$ seiner Helligkeit, wie stark wird derselbe noch sein, wenn er 10 solche Glasscheiben durchdringen soll; wenn man die anfängliche Lichtstärke $= 1$ annimmt.

Auflösung. Die Reihe der Lichtstärken ist folgende:

$$1,\ \frac{4}{5},\ \frac{4}{5} - \frac{\frac{4}{5}}{5} \text{ oder } \frac{4}{5} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} \text{ u. s. w.},$$

also: $1,\ \frac{4}{5},\ \frac{16}{25},\ \frac{64}{125}$ u. s. w.

Die Lichtstärke, nach Durchdringung der 10ten Glasscheibe, bildet das 11te Glied dieser Reihe (weil die Stärke des Strahls, ehe dieser durch die erste Scheibe geht, das erste bildet); daher:

$$t = 1 . \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 0{,}8^{10} = 0{,}1073742 \ldots .$$

Der Strahl hat also nur noch ungefähr den 10ten Theil seiner früheren Stärke.

11) Man soll den unendlichen periodischen Decimalbruch 0,871871871 ...... in einen gemeinen Bruch verwandeln.

Auflösung. Setze statt des Bruches folgende Reihe:

$$\frac{871}{1000} + \frac{871}{1000000} + \ldots\ldots\ldots + \frac{871}{\infty},$$

daher $$s = \frac{a}{1-q} = \frac{0{,}871}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{0{,}871}{\frac{999}{1000}} = \frac{871}{999}.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch auf die gewöhnliche Weise.

Z. B. $x = 0{,}871871 \ldots\ldots$, folglich:

$$\left.\begin{array}{r} 1000x = 871{,}871 \ldots \\ x = 0{,}871 \ldots \end{array}\right\} \text{ subtrah.}$$

$$999x = 871; \text{ daher } x = \frac{871}{999}.$$

12) Das 12te Glied einer geometrischen Reihe ist $= 1062882$, das 18te $= 774840978$, wie heißt das erste, der Quotient und die Summe von 20 Gliedern?

Auflösung. Man hat: I.) $1062882 = aq^{11}$ und II.) $774840978 = aq^{17}$, $\frac{II.}{I.}$ gibt: $q^6 = 729$,

folglich: $q = \sqrt[6]{729} = \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{9} = 3$; diesen Werth in I. gesetzt gibt $a = \frac{1062882}{3^{11}} = 6$,

und nun ist die Summe von 20 Gliedern

$$= \frac{6(3^{19} - 1)}{3 - 1} = 3^{20} - 3 = 3486784398.$$

§. 5. Aufgaben über geometrische Reihen.

1) Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist $= 1$, der Quotient $= 2$, wie heißt das 6te Glied und die Summe von 6 Gliedern?

2) Wie heißt das letzte Glied und die Summe der Reihe 10, 40, 160 ......, wenn dieselbe 9 Glieder hat?

3) Findet das 16te Glied und die Summe der 16 Glieder der Reihe 16, 8, 4, 2 ....!

4) Die Reihe -9728, 7296 .... hat 4 Glieder, wie groß ist ihr letztes Glied und ihre Summe?

5) Eine geometrische Reihe hat 100 Glieder, das erste ist $= 3$, das 4te $= 4$; wie groß ist das letzte und die Summe?

6) Ein Magnet trägt anfangs 10 ℔ Eisen, nun wird seine Tragkraft 8mal nach einander verstärkt, wobei dieselbe immer um $\frac{1}{10}$ der vorigen Stärke zunimmt; wie viel trägt er zuletzt?

7) Wie heißt die Summe der Reihe von n Gliedern:

$$a,\ a^2,\ a^3\ \ldots\ldots\ ?$$

8) Welches Anfangsglied hat eine Reihe, deren zehntes Glied $= 39366$ und deren Quotient $= 3$ ist?

9) Wie groß ist die Summe der unendlichen Reihe

$$27,\ 9,\ 3,\ 1\ \ldots\ldots\ ?$$

10) Welchem gewöhnlichen Bruch ist der unendliche periodische Decimalbruch $0,\overset{\frown}{7143}\overset{\frown}{7143}$ .... gleich?

11) Der Erfinder des Schachspiels sollte sich eine Belohnung wählen, und er verlangte nun, man solle ihm auf das erste Feld des Schachbretts (welches 64 Felder hat) ein Waizenkorn; auf das 2te 2, auf das 3te 4 u. s. w. legen. Wie viele Waizenkörner hätte er (falls es möglich gewesen wäre seinen Wunsch zu erfüllen) bekommen?

12) Ein Verschwender wollte die Hufe seines Pferdes mit Silber beschlagen lassen und fragte einen Schmied, wie viel er dafür verlange. Dieser sprach: für das Silber verlange ich gar nichts, bezahlen Sie mir für den ersten Hufnagel nur 1 Pfennig und für jeden folgenden um die Hälfte mehr als für den vorhergehenden; so bin ich zufrieden. Wenn nun an jeden Fuß 8 Nägel kommen; wie viel verlangte der Schmied?

13) Wenn man einen Schoppen einer Flüssigkeit in 2 Maaß Wasser gießt und von der Mischung wieder einen Schoppen in 2 Maaß Wasser schüttet, und diese Verdünnung 10mal vornimmt; wie viel enthält die letzte Mischung von der Flüssigkeit?

14) Eine Luftpumpe hat eine solche Construction, daß mit jedem Kolbenzuge $\frac{2}{11}$ der unter der Glocke befindlichen Luft entfernt werden; wie viele Kolbenzüge sind nöthig, bis die Luft auf $\frac{1}{100}$ verdünnt ist?

15) Stellet den unendlichen Decimalbruch 0,317777... (dessen Periode 7 in der 3ten Stelle anfängt) durch einen gemeinen Bruch dar!

16) Summiret die unendliche geometrische Progression

$$1 + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^4} + \frac{2}{a^6} + \ldots\ldots, \text{ worin } a > 1 \text{ ist!}$$

17) Suchet eine allgemeine Formel, durch welche man **n** unmittelbar aus **a**, q und **s** finden kann!

18) Zwischen 3 und 5 sollen 11 Glieder eingeschaltet werden, damit eine geometrische Reihe von 13 Gliedern entsteht; wie heißt diese?

19) Es hat Jemand ein Faß Wein, welches 100 Maaß enthält, jede zu 48 kr.; er zapft nun eine Maaß ab und füllt das Faß wieder mit Wasser, er zapft dann nochmals eine Maaß ab und füllt das Faß wieder mit Wasser u. s. f. Wenn nun das Abzapfen immer erst dann stattfindet, wenn das Wasser und der Wein vollständig gemischt sind; wie oft kann er eine Maaß Flüssigkeit abzapfen, damit jede im Fasse bleibende Maaß am Ende 32 kr. werth ist?

20) Es setzt Jemand bei einem Hazardspiele zum erstenmale 36 kr. und da er verliert, setzt er immer das doppelte seines vorhergehenden Einsatzes. Ein anderer Spieler setzt immer die gleiche Summe dagegen. Nachdem nun der erste einige Spiele hinter einander verlor und jedesmal den Einsatz verdoppelte, so gewinnt er zuletzt und zieht nun die zuletzt von ihm und dem anderen gesetzte Summe von 1228 fl. 48 kr. ein; wie oft hat er verloren und wie viel gewann oder verlor jeder Spieler?

21) Ein Landwirth säet 3 Sester Korn und benutzte jedes Jahr den 3ten Theil seiner Ernte wieder zur Aussaat für das folgende Jahr; nach einigen Jahren findet er, daß seine letzte Ernte 771 Malter mehr beträgt als alle Aussaaten, welche er bisher machte, zusammen genommen. Nach welchem Jahre hatte er diese Ernte, wenn jede Ernte gleich dem 6fachen ihrer Aussaat war?

22) Ein Körper legt in der ersten Secunde einen Weg von 60 Fuß, in der 2ten 50 Fuß u. s. w. in abnehmender geometrischer Progression, in welcher Zeit wird er einen um 400 Fuß entfernten Ort erreichen?

23) Man fand durch Versuche, daß unter bestimmten Umständen einer Kraft = 4 eine Wirkung 18, einer Kraft 5 eine Wirkung 24, der Kraft 6 die Wirkung 32 u. s. w. entsprach (bis zu einer bestimmten Grenze). Wenn man nun Zwischenresultate bestimmen will, ohne weitere Versuche zu machen, z. B. wenn man finden will, welche Wirkungen die Kräfte $4\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$ u. s. w. hervorbringen; auf welche Weise lassen sich diese Wirkungen berechnen?

24) Die Summe der geraden Glieder einer geometrischen Progression von 10 Gliedern ist = **6138**, die Summe der ungeraden = **3069**. wie heißt diese Progression?

25) Die Summe der 4 ersten Glieder einer geometrischen Reihe ist = **40**, die Summe der 4 letzten = **262440**; wenn nun die Reihe **12** Glieder hat, wie heißen diese?

Anwendung der geometrischen Progressionen auf die Zinseszins und Rentenrechnung.

§. 6. Zinseszinsrechnung.

Wenn die Zinsen eines Capitals, sobald sie fällig sind, selbst wieder als Capital betrachtet und verzinst und die Zinsen dieser Zinsen gleichfalls zinsbringend angelegt werden; so entstehen zusammengesetzte Zinsen, oder Zinseszinsen.

a) Ein Capital **a** sei zu **c** Procent auf **n** Jahre ausgeliehen und zwar sollen die Zinsen wieder verzinst werden; man soll die Summe berechnen, bis zu welcher das Capital anwächst.

Auflösung. Wenn **1** fl. zu **c** % auf ein Jahr ausgeliehen wird, so trägt derselbe $\frac{c}{100}$ Zinsen; aus dem anfänglichen Gulden sind daher bis am Ende des ersten Jahres $1 + \frac{c}{100}$ oder $\frac{100+c}{100}$ fl. geworden.

Man bezeichnet nun diesen Bruch durch **p** und nennt ihn den Zinsfuß, (der Zinsfuß ist also diejenige Größe, bis zu welcher **1** fl. in einem Jahre angewachsen ist).

Wenn nun **1** fl. in **1** Jahr zu **p** fl. anwächst, so wachsen **a** fl. in **1** Jahr an zu $a \cdot p$; diese **ap** wieder als neues Capital betrachtet wachsen bis zum Ende des 2ten Jahres zu $ap \cdot p = ap^2$ an, diese bis zum Ende des 3ten Jahres zu ap^3 u. s. w.

Die angewachsenen Capitalien sind daher:

$$\underbrace{ap}_{1},\quad \underbrace{ap^2}_{2},\quad \underbrace{ap^3}_{3}\ \ldots\ldots\ldots\ \underbrace{ap^n}_{n};$$

daher $s = ap^n$, oder $a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^n$.

Z. B. Ein Capital von 8000 fl. steht zu 5 Procent 10 Jahre lang auf Zinseszinsen, wie hoch wächst es an?

Hier ist $a = 8000$, $p = \frac{100 + 5}{100} = 1{,}05$ und $n = 10$, daher

$$s = 8000 \cdot 1{,}05^{10};$$

gibt mit Log. gerechnet: **13031,16 fl.** oder **13031 fl. 9⅗ kr.**

b) Dieselbe Formel gilt auch für die andern drei Hauptfälle, nämlich für folgende:

1) Das Endcapital (s), der Zinsfuß (p) und die Zahl der Jahre (n) sind gegeben; man soll finden, welches Grundcapital (a) ausgeliehen wurde.

   Dieser Fall tritt unter Anderem z. B. da ein, wenn ein Schuldner, der nach n Jahren s fl. bezahlen soll, seine Schuld baar entrichten will, der Gläubiger hat hier nur so viel Capital anzusprechen, daß dieses in n Jahren zu s anwachsen kann. Der Gläubiger bewilligt in diesem Falle dem Schuldner einen Abzug (**Disconto**).

2) Ein Capital a ist in einer bestimmten Zeit (in n Jahren) zu einer Summe s angewachsen; man soll bestimmen, wie viel Procente dasselbe getragen hat (hier ist p unbekannt und $c = 100p - 100$).

3) Es soll die Zeit (n) berechnet werden, wie lange ein Capital a stehen muß, um durch Zinseszinsen zu s anzuwachsen, wenn der Zinsfuß bekannt ist.

In allen 4 Fällen sind also von den 4 Größen a, p, n und s, 3 Größen gegeben, und die 4te ist unbekannt.

4) Sollen nur die Zinsen und Zinseszinsen gefunden werden; so rechnet man s und zieht dann a davon ab, und wenn blos die Zinseszinsen gesucht werden sollen, so rechnet man die einfachen Zinsen des Capitals (nach der gewöhnlichen Zinsrechnung) und zieht diese vom ganzen Zuwachs (oder von s — a) ab.

c) Nicht nur von Capitalien, sondern auch von anderen Dingen kann der Zuwachs (falls er auf ähnliche Weise wie bei den Capitalien statt findet) gefunden werden; z. B. die Zunahme des Holzes in Wäldern und das Zunehmen der Bevölkerung.

Aufgaben.

1) Wie hoch wachsen 5000 fl., zu 4 Procent ausgeliehen, in 20 Jahren an; wie groß ist der Zuwachs des Capitals, und wie groß sind die Zinseszinsen?

Auflösung. $s = 5000\left(\frac{100+4}{100}\right)^{20} = 5000 \,.\, 1{,}04^{20}$.

Man erhält: $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$, multipl. mit 20

$0{,}3406660$
$\log 5000 = 3{,}6989700$ addirt

$\log s = 4{,}0396360$, daher $s = 10955{,}6$.

Das angewachsene Capital ist daher 10955 fl. 36 kr.

Daher der Zuwachs = 5955 fl. 36 kr.

Zu einfachen Zinsen ausgeliehen hätte das Capital in 1 Jahr $50 \,.\, 4 = 200$, also in 20 Jahren 4000 fl. Zins getragen, daher sind die Zinseszinsen = 5955 fl. 36 kr. — 4000 fl. = 1955 fl. 36 kr.

2) In einer Stadt, welche von 36960 Menschen bewohnt wird, hat man aus den Geburts- und den Sterbetabellen gefunden, daß die Bevölkerung jährlich um $\frac{1}{60}$ zunimmt; wie viele Menschen werden in 40 Jahren da sein (wenn man diese Zunahme als eine unveränderliche annimmt)?

Aufl. Hier ist $c = \frac{100}{60}$, (denn 100 nehmen um $100 \,.\, \frac{1}{60}$ zu) oder $c = \frac{5}{3}$;

folglich $p = \frac{100 + \frac{5}{3}}{100} = 1{,}016666\ldots\ldots$; wofür man hier besser den gemeinen Bruch $\frac{305}{300}$ oder $\frac{61}{60}$ annimmt.

Daher $s = 36960 \,.\, \left(\frac{61}{60}\right)^{40}$ u. s. w. = 71593 Einwohner.

3) **A** schuldet dem **B** 1500 fl., die Schuld ist aber erst nach 4 Jahren zu entrichten; wie viel muß **A** baar bezahlen, wenn ihm **B** 6 Procent Disconto gestattet; (oder was dasselbe ist: welches Capital wächst in 4 Jahren zu 6 % Zinsen auf 1500 fl. an)?

Aufl. Hier ist $s = 1500$, $p = 1{,}06$, $n = 4$ und a ist unbekannt. Man hat daher:

$1500 = a \,.\, 1{,}06^4$, $a = \frac{1500}{1{,}06^4}$ u. s. w. = 1188,14 fl.

4) Ein Capital ist in 10 Jahren von 4020 fl. auf 6900 fl. angewachsen; zu wie viel Procenten wurde es verzinst?

Aufl. $s = 6900$, $a = 4020$, $n = 10$, p unbekannt!

$$6900 = 4020 \cdot p^{10}, \text{ hieraus } p = \sqrt[10]{\frac{6900}{4020}} = \sqrt[10]{\frac{115}{67}}.$$

Man findet $p = 1{,}0555\ldots\ldots$ also $c = 105{,}55 - 100 = 5\frac{11}{20}$.

5) In welcher Zeit wachsen 16250 fl., zu 3 Procent ausgeliehen, bis auf 33033 fl. an? (oder in welcher Zeit tragen 16250 fl. zu 3 Procent 16783 fl. Zinsen und Zinseszinsen)?

Hier ist: $a = 16250$, $s = 33033$, $p = 1{,}03$, n unbekannt, daher: $33033 = 16250 \cdot 1{,}03^n$, woraus:

$$\log 33033 = \log 16250 + n \cdot \log 1{,}03, \text{ und:}$$

$$n = \frac{\log 33033 - \log 16250}{\log 1{,}03} = 24, \ldots\ldots \text{ folgt.}$$

6) Wie lange muß ein Capital zu 5 Procent auf Zinseszinsen stehen, um $2\frac{1}{2}$ mal so groß zu werden?

Aufl. Hier ist $s = 2\frac{1}{2} \cdot a$, $p = 1{,}05$, n unbekannt;

folglich: $2\frac{1}{2}\, a = a \cdot 1{,}05^n$; $2{,}5 = 1{,}05^n$,

daher $n = \frac{\log 2{,}5}{\log 1{,}05} = 18$ Jahre $9\frac{1}{3}$ Monat.

§. 7. Aufgaben.

1) Wie hoch wachsen 250 fl. zu 4 Procent in 40 Jahren an?

2) Um wie viel vermehrt sich ein Capital von 2000 fl. in 7 Jahren, wenn es zu 5 Procent ausgeliehen ist?

3) Wie groß ist die Zinsdifferenz für ein Capital von 7200 fl., welches 27 Jahre lang zu $4\frac{3}{4}$ Procent ausgeliehen war; wenn es nur einfache Zinsen oder wenn es Zinseszinsen getragen hat?

4) Ein Wald wurde zu 26000 Klafter Holz taxirt, wenn nun der Holzzuwachs jährlich 3 Procente beträgt und es werden jährlich 2 Procente Holz aus demselben geschlagen, wie groß wird der Holzbestand in 30 Jahren sein?

5) Welches Capital muß man ausleihen, um bei $4\frac{1}{2}$ procentigen Zinseszinsen in 13 Jahren 65784 fl. angewachsenes Capital zu erhalten?

6) In einem Bezirke wohnen jetzt 108000 Menschen, wenn man

nun weiß, daß der Zuwachs jährlich $3\frac{1}{2}$ Procent betrug; wie viele Bewohner zählte der Bezirk vor 7 Jahren?

7) **A** soll nach einer Schuldurkunde dem **B** in 3 Jahren 1800 fl. und 2 Jahre später noch 1000 fl. bezahlen. Da er aber nun gerade ein Capital vorräthig hat, so will er seine Schuld jetzt entrichten; wenn ihm nun **B** 4 % Disconto gestattet, wie viel muß er dem **B** geben?

8) Bei der Versteigerung eines Hauses bietet **A** eine baare Summe von 12500 fl., **B** will 6000 fl. baar und 7400 fl. nach 4 Jahren bezahlen, und **C** erbietet sich nach 5 Jahren ein Capital von 16000 fl. zu entrichten; wenn nun der Verkäufer 4 Procent Zinsen und Zinseszinsen in Anschlag bringt, welches Gebot wird das höchste sein in baarem Werthe?

9) Ein Capital ist während 10 Jahren von 3600 fl. auf 6502 fl. angewachsen; zu wie viel Procent war es angelegt?

10) In einem Fabrikgeschäft wurde ein Capital von 7441 fl. 10 Jahre lang ausschließlich zum Betrieb des Geschäftes verwendet; wenn nun am Ende dieser Zeit das Geschäft mit einem reinen Gewinn von 9324 fl. verkauft wird, zu wie viel % rentirte sich das darauf verwendete Capital?

11) Zu wie viel Procenten vermehrte sich ein Capital von 8000 fl. seit 20 Jahren; wenn jetzt der Besitzer jährlich 756 fl. Zinsen von dem angewachsenen Capital bezieht, das er nun zu 4 Procent ausgeliehen hat?

12) Ein Gläubiger bietet seinem Schuldner, an den er nach 4 Jahren 500 fl. zu fordern hat, an, er wolle ihm die Schuld quittiren, wenn er jetzt baar 350 fl. bezahle; wie viel Procente Disconto will er dem Schuldner nachlassen?

13) Zu wie viel Procenten war ein Capital angelegt, welches in 14 Jahren und $2\frac{1}{2}$ Monaten sich verdoppelte?

14) Wie lange muß ein Capital zu $4\frac{1}{2}$ Procent auf Zinseszinsen stehen, um von 200 fl. auf 2400 fl. anzuwachsen, (oder um 12mal größer zu werden)?

15) Eine Gemeinde will in ihrem Walde, der jetzt zu 12305 Klafter abgeschätzt wurde, erst dann Holz schlagen lassen, wenn derselbe einen Bestand von 15000 Klaftern erreicht hat. Wenn nun der Holzzuwachs jährlich $\frac{1}{50}$ beträgt; wie lange muß noch gewartet werden, bis der erste Holzhieb stattfinden kann?

16) In einem Testamente vom Jahre 1776 wurden 1000 fl. zur Errichtung einer Erziehungsanstalt ausgesetzt; welche aber erst dann gegründet werden soll, wenn das Capital jährlich 5000 fl. Zinsen trägt. Die Summe von 1000 fl. wurde zu 5 Procent angelegt; in welchem Jahre kann die Anstalt ins Leben treten?

17) Ein Capital stand die Hälfte eines gewissen Zeitraums hindurch zu 5 Procent und die andere Hälfte zu 4 Procent auf Zinseszinsen; wenn es nun dadurch auf das Dreifache angewachsen ist

(oder um das Doppelte zugenommen hat), wie lange stand es zu 5 und zu 4 Procent?

18) Leitet 3 allgemeine Formeln für die 3 Fälle ab, in welchen entweder a, oder p, oder n unbekannt ist und die 3 anderen Größen gegeben sind!

19) Ein Capitalist hat von seinem Vermögen 20000 fl. zu 4 Procent ausgeliehen, und ließ die Zinsen beim Capital stehen. Nach 10 Jahren nimmt er von dem Capital zum Ankauf eines Hauses 15000 fl. hinweg und den Rest erhält er nun zu $4\frac{1}{2}$ Procent verzinst; 5 Jahre später fällt der Zinsfuß und er erhält nur noch $3\frac{3}{4}$ Procent. Er läßt sein Geld nun noch 2 Jahre lang zu $3\frac{3}{4}$ Procent stehen und verwendet dann die ganze Summe zu einem bestimmten Zweck; wie groß war diese?

20) Wenn man 5procentige Zinsen annimmt; wie groß sind die Zinsen, wenn dieselben halbjährlich bezahlt werden, und wie groß, wenn sie monatlich entrichtet werden sollen?

21) Eine Schuld von 1000 fl. soll vierteljährlich zu 1 Procent verzinst werden; wie groß ist das Capital nach 6 Jahren und um wie viel differirt die Zahlung von derjenigen, welche geleistet werden müßte, wenn jährliche Zinsen zu 4 Procent gerechnet würden?

22) Wenn 3000 fl. zu 5 Procent eben so hoch anwachsen sollen als 2500 fl. zu 4 Procent in 10 Jahren; wie lange müssen sie auf Zinseszinsen stehen?

23) In einer Stadt ist die Bevölkerung seit 10 Jahren von 12000 Menschen auf 15000 gestiegen; wie hoch wird sie in weiteren 5 Jahren unter denselben Verhältnissen steigen?

24) Ein Capital trägt 4 Procent, ein anderes um 5000 fl. größeres steht zu 3 Procent; nach 10 Jahren haben beide gleich viel Zinsen und Zinseszinsen getragen; wie groß sind die 2 Capitalien?

25) Ein Capital steht zu 5 Procent eine gewisse Anzahl Jahre hindurch auf Zinseszinsen, ein anderes gleich großes Capital steht 3 Jahre länger und zu $4\frac{1}{2}$ Procent; wenn nun beide zu gleichen Summen angewachsen sind, wie lange waren beide ausgeliehen?

§. 8. Rentenrechnung.

a) Wenn Jemand jährlich eine bestimmte Summe erhält, wodurch ein Capital sammt Zinsen nach und nach abgetragen wird, so nennt man diese Summe eine Rente und das Capital die Mise.

Die Rente ist eine Jahresrente (Annuität) oder Zeitrente, wenn dieselbe eine bestimmte Anzahl Jahre bezogen wird; eine Rente dagegen, welche bis zum Tode des Empfängers (des Rentenirers) bezahlt werden muß, heißt Leibrente oder Lebensrente.

Die Zeitrentenrechnungen lassen sich durch Anwendung der geometrischen Reihen leicht ausführen; bei den Leibrenten aber muß man auf das Alter des Renterirers und dessen wahrscheinliche Lebensdauer Rücksicht nehmen, wozu sogenannte Sterblichkeits (Mortalitäts)-Ta-

bellen dienen. Wir wollen hier nur denjenigen Fall betrachten, wenn die Rente jährlich bezahlt wird und sich nicht ändert.

b) Es wird am Ende eines jeden Jahres eine Summe r entrichtet, wenn man nun die Zinseszinsen in Anschlag bringt (Zinsfuß p); wie groß sind alle Zahlungen in n Jahren zusammen?

Die 1te Rente r wächst bis zum Ende des nten Jahres, also in $n - 1$ Jahren (weil sie erst am Ende des ersten Jahres bezahlt wird) an zu $r \cdot p^{n-1}$,

die 2te Rente in $n - 2$ Jahren gibt rp^{n-2},

die 3te $r \cdot p^{n-3}$ u. s. w.,

die im vorletzten Jahre (im $n - 1$ten) bezahlte Rente gibt rp,

die letzte bleibt $= r$;

man hat daher, wenn man die Reihe (von rückwärts angefangen) anschreibt:

$$r + rp + rp^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots rp^{n-2} + rp^{n-1}.$$

Die Summe dieser Reihe ist $= \frac{rp^{n-1} \cdot p - r}{p - 1}$, nach §. 4. Formel **III.**, oder nach §. 4. Formel **II.**:

$$(A) \qquad s = \frac{r(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Will man aber den baaren Werth a aller Renten wissen, so ist

$$ap^n = s = \frac{r(p^n - 1)}{p - 1}, \text{ daher:}$$

$$(B) \qquad a = \frac{r(p^n - 1)}{(p - 1)p^n}.$$

c) Wenn Jemand ein Capital auf Zinseszinsen ausleiht und außerdem, daß er das Capital und die Zinsen unberührt läßt, auch noch am Ende eines jeden Jahres eine Summe r zum Capitale legt, die ebenfalls verzinst wird, so ist die ganze Summe aller Zahlungen und des Capitals am Ende des nten Jahres

$$s = ap^n + \frac{r(p^n - 1)}{p - 1} \qquad (C).$$

Denn das Capital a wächst an zu ap^n

und die Summe r wächst an zu $\frac{r(p^n - 1)}{p - 1}$.

Nimmt der Capitalist dagegen jährlich die Summe r hinweg, so beträgt das angewachsene (oder auch verminderte) Capital nach n Jahren:

$$s = ap^n - \frac{r(p^n - 1)}{p - 1} \quad \text{(D)}.$$

Anmerkung.

Man hat von diesen Formeln nur die Formel A zu behalten nöthig, denn die anderen lassen sich mit Hülfe der Formel $s = ap^n$ hieraus ableiten. Ebenso lassen sich die Größen r oder a, p oder n finden, wenn die eine unbekannt ist und die anderen gegeben sind.

Aufgaben.

1) Ein Mann hat sich seit 20 Jahren jedes Jahr 100 fl. erspart, und dieses Geld sogleich verzinslich angelegt; wie viel besitzt er nun, wenn ihm 5 Procent Zinsen bewilligt wurden?

Aufl. $s = \frac{100(1{,}05^{20} - 1)}{1{,}05 - 1} = \frac{100}{0{,}05}(1{,}05^{20} - 1) = 2000(1{,}05^{20} - 1)$

$= 2000 \,.\, 1{,}05^{20} - 2000 = 3306$ fl. 36 kr.

2) Es besitzt Jemand ein Vermögen von 10000 fl., das er zu 4 % ausgeliehen hat; er spart aber von seiner Besoldung noch jährlich 200 fl., welche ebenfalls am Ende eines jeden Jahres zu 4 % angelegt werden; wie groß wird das Vermögen desselben in 10 Jahren sein?

Aufl. Das Capital wächst zu $10000 \,.\, 1{,}04^{10}$ an und die jährliche Zulage zu $\frac{200(1{,}04^{10} - 1)}{1{,}04 - 1}$, daher hat er (was auch aus Formel C folgt) am Ende des 10ten Jahres:

$$s = 10000 \,.\, 1{,}04^{10} + \frac{200(1{,}04^{10} - 1)}{0{,}04} =$$

$$= 10000 \,.\, 1{,}04^{10} + 5000(1{,}04^{10} - 1)$$

oder $s = 15000 \,.\, 1.04^{10} - 5000$ fl. $= 17203$ fl. 39 kr.

3) Ein Kaufmann hat in seinem Geschäfte ein Capital von 20000 fl. und betreibt seine Unternehmungen in solcher Weise, daß sich sein Capital zu 15 Procent rentirt. Er nimmt nun jedes Jahr zu seinem Unterhalt 2000 fl. von dem Ertrage weg und verwendet das Uebrige wieder zu Unternehmungen; wie hoch beläuft sich sein Vermögen in 15 Jahren?

Erste Auflösung. Das Capital wäre nach fünfzehn Jahren $= 20000 \,.\, 1{,}15^{15}$, die weggenommenen 2000 fl. hätten sich zu $\frac{2000(1{,}15^{15} - 1)}{1{,}15 - 1}$ verwerthet; daher ist (wie auch aus Formel D folgt):

$$s = 20000 \,.\, 1{,}15^{15} - \frac{2000(1{,}15^{15} - 1)}{1{,}15 - 1},$$

oder $s = 20000 \,.\, 1{,}15^{15} - \frac{40000}{3} \,.\, 1{,}15^{15} + \frac{40000}{3}$

$$s = \frac{20000}{3} \,.\, 1{,}15^{15} + \frac{40000}{3} = 81626 \text{ fl.}$$

Andere Auflösung. Die jährliche Einnahme beträgt 200 . 15 = 3000 fl., davon bleiben noch 1000 fl. übrig (weil er 2000 verbraucht). Man suche nun, wie hoch diese 1000 fl. anwachsen; (das Grundcapital vermehrt sich nun nicht mehr, es bleibt 20000 fl.).

Man findet $s = 20000 + \frac{1000(1{,}15^{15} - 1)}{1{,}15 - 1} =$

$$s = 20000 + \frac{20000}{3} \,.\, 1{,}15^{15} - \frac{20000}{3} = \frac{20000}{3} \,.\, 1{,}15^{15} + \frac{40000}{3}$$

wie oben.

4) Es will Jemand sich eine Rente von 600 fl. erwerben, wie viel Capital (Mise) muß er dafür jetzt geben; wenn die Zinsen zu 3 Procent gerechnet werden und die Rente 12 Jahre lang bezogen werden soll?

Erste Auflösung. Die 12 Renten sind am Ende des 12ten Jahres $= \frac{600(1{,}03^{12} - 1)}{1{,}03 - 1}$, das ihnen gleichkommende baare Capital a wäre aber zu $a \,.\, 1{,}03^{12}$ angewachsen; daher muß, weil durch die Rente das Capital sammt Zinsen verbraucht wird:

$$a \,.\, 1{,}03^{12} - \frac{600(1{,}03^{12} - 1)}{1{,}03 - 1} = 0$$ sein (ebenso nach Formel D).

2te Auflösung. Der baare Werth der Renten ist (nach Formel B) $a = \frac{600(1{,}03^{12} - 1)}{(1{,}03 - 1) \,.\, 1{,}03^{12}}$, wie oben.

Man findet daher $a = \frac{20000(1{,}03^{12} - 1)}{1{,}03^{12}} = 20000\left(1 - \frac{1}{1{,}03^{12}}\right)$

oder $a = 20000 - \frac{20000}{1{,}03^{12}} = 5972$ fl. 24 kr. ungefähr.

5) Welche Rente erhält ein Rentenirer jährlich, wenn er dafür in 8 Jahren eine Summe von 1290 fl. entrichten will, und wenn 4 Procent Zinsen gerechnet werden?

Auflösung.

$$\frac{r(1{,}04^{8} - 1)}{1{,}04 - 1} = 1290, \quad r = \frac{51{,}6}{1{,}04^{8} - 1} = 140 \text{ fl.}$$

6) Ein Vater überläßt seinem Sohne sein ganzes Vermögen von 40000 fl. unter der Bedingung, daß er ihm jährlich eine bestimmte Rente zu geben habe und bemerkt hierbei, wenn ich noch 30 Jahre lang lebe, so ist das Vermögen, welches ich dir überlasse, zu 4 % gerechnet, erst zur Hälfte wieder an mich bezahlt. Wie groß war die Rente?

Erste Auflösung.

Das halbe Vermögen (20000 fl.) wächst in 30 Jahren eben so hoch an als die Rente, daher

$$20000 \,.\, 1{,}04^{30} = \frac{r(1{,}04^{30} - 1)}{1{,}04 - 1} \text{ oder}$$

Zweite Auflösung

(nach Formel **B**) $$20000 = \frac{r(1{,}04^{30} - 1)}{(1{,}04 - 1) \,.\, 1{,}04^{30}} \text{ (baarer Werth).}$$

Hieraus: $$r = \frac{800 \,.\, 1{,}04^{30}}{1{,}04^{30} - 1} = 1156 \text{ fl. } 36 \text{ fr.}$$

Man erhält nämlich: log 800 = 2,9030900 }
30 . log 1,04 = 0,5109990 } addirt.

log des Zhl = 3,4140890

num zu 0,5109990 = 3,24339, davon 1 abgezogen, gibt 2,24339 und den log. dieser Zahl vom log. des Zählers abgezogen; dann die Zahl gesucht.

7) **A** schuldet dem **B** 1000 fl. und überläßt ihm dafür einen Theil seiner Wohnung, für welchen er früher 75 fl. Miethzins erhielt; wie lange kann **B** bei **A** frei wohnen, bis die Schuld getilgt ist, wenn man 5 Procent Zinseszinsen rechnet?

Auflösung. $$1000 \,.\, 1{,}05^{n} = \frac{75(1{,}05^{n} - 1)}{1{,}05 - 1}, \text{ hieraus:}$$

$$50 \,.\, 1{,}05^{n} = 75 \,.\, 1{,}05^{n} - 75, \text{ oder } 25 \,.\, 1{,}05^{n} = 75$$

$$1{,}05^{n} = 3, \quad n = \frac{\log 3}{\log 1{,}05}, \text{ also } 22\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

8) Ein Capital von 9000 fl. steht zu 5 % auf Zinseszinsen und wird jährlich noch um 750 fl. vermehrt, die am Ende jedes Jahres zugelegt werden. Nach wie viel Jahren wird das Capital auf 24094 fl. angewachsen sein?

Auflösung. Das Capital wird $= 9000 \,.\, 1{,}05^{n}$, die Zulage $= \frac{750(1{,}05^{n} - 1)}{1{,}05 - 1}$, mithin die Summe:

$$9000 \,.\, 1{,}05^{n} + 15000 \,.\, (1{,}05^{n} - 1) = 24094, \text{ oder:}$$

$$1{,}05^{n} = \frac{39094}{24000}, \text{ woraus } n = 10 \text{ Jahre.}$$

§. 9. Die Rente wird nicht jährlich bezahlt.

Wenn die Rente nicht am Ende eines jeden Jahres, sondern jedesmal am Ende von m Jahren (wobei m auch ein Bruch sein kann) entrichtet wird, so erhält man Folgendes:

a) Wir nehmen zuerst an: n sei durch m theilbar.

Die erste Rente r,	welche nach m	Jahren bez. wird, wächst an zu	rp^{n-m}
„ 2te „ r,	„ „ 2m	„ „ „ „ „	rp^{n-2m}
:	:		:
:	:		:
:	:		:
„ letzte „ r,	„ „ n	„ „ „ „	bleibt r,

daher $s = r + rp^m + \ldots\ldots\ldots + rp^{n-2m} + rp^{n-m}$

(rp^m ist die vorletzte Rente, welche noch m Jahre lang steht.)

Die Summe dieser Progression ist nach §. 4. Formel III.

$$s = \frac{rp^{n-m}.\,p^m - r}{p^m - 1} = \frac{rp^n - r}{p^m - 1}, \text{ oder:}$$

$$s = \frac{r(p^n - 1)}{p^m - 1} \qquad (E)$$

Z. B.: Eine Rente von 1000 fl. ist alle 2 Jahre fällig und wird 10mal bezahlt (oder wird bis zum Ende des 20ten Jahres entrichtet); so wird das angewachsene Capital

$$s = \frac{1000(p^{20} - 1)}{p^2 - 1} \text{ sein müssen.}$$

b) Wenn m in n nicht aufgeht, so rechne man die angewachsene Summe bis zum Ende der Zeit, in welcher die letzte Rente bezahlt wird, nach der Formel E; und diese Summe betrachte man nun als ein Capital, welches noch bis zum Ende des nten Jahres zu verzinsen ist. Z. B.

Es legt Jemand am Ende des 3ten Jahres 100 fl. in eine Sparkasse, welche 3 % Zinseszinsen vergütet, wie viel hat er an die Casse am Ende des 11ten Jahres zu fordern?

Am Ende des 9ten Jahres wurden die letzten 100 fl. eingelegt, die Summe ist dann $= \frac{100(1{,}03^9 - 1)}{1{,}03^3 - 1}$ und diese steht nun noch 2 Jahre lang; daher beträgt die Forderung:

$$\frac{100(1{,}03^9 - 1)\,.\,1{,}03^2}{1{,}03^3 - 1}.$$

§. 10. Aufgaben über die Rentenrechnung.

1) Ein Rentenirer bezieht jährlich 500 fl. und zwar 20 Jahre lang; wie hoch beläuft sich die Summe aller bezogenen Renten am Ende des 20ten Jahres, wenn man 5 % rechnet?

2) Zur Tilgung der Staatsschulden werden von den Staatseinkünften jährlich 1 Million Gulden verwendet. Wenn nun die Schulden auf diese Weise in 20 Jahren getilgt sind, wie hoch belaufen sich dieselben jetzt, wenn man die Zinsen zu 4 % rechnet?

3) Mit welchem Capital kann man sich eine auf 8 Jahre zu beziehende Rente von 252 fl. kaufen; wenn der Zinsfuß zu 4 % angenommen und das Capital erst am Ende des 8ten Jahres ausbezahlt wird?

4) Wie groß ist der baare Werth einer Jahrrente von 1500 fl., welche man auf 6 Jahre zu genießen hat; wenn man die Zinsen zu $3\frac{1}{2}$ % rechnet?

5) Die Sparkassen verzinsen die Einlagen zu 3 Procent und gewähren Zinseszinsen. Wenn nun Jemand 100 fl. in die Sparkasse einlegt und jedes Jahr eine Nachzahlung von 60 fl. macht, wie viel wird er nach 30 Jahren sich erspart haben?

6) Eine Wittwe hat ein Vermögen von 3600 fl., von dessen Zinsen sie aber nicht leben kann, weil sie das Capital nur zu 4 % angelegt hat und jährlich zu ihrem Unterhalt 250 fl. braucht; sie nimmt daher jedes Jahr so viel vom Capital weg, daß sie 250 fl. verbrauchen kann; wie groß wird ihr Vermögen nach 12 Jahren sein?

7) **A** schuldet dem **B** nach 8 Jahren 5160 fl., er will nun die Schuld in 8jährlichen Terminen, jedesmal am Ende des Jahres in gleichen Theilen abtragen; wie viel muß er jährlich bezahlen, wenn 4 Procent Zinsen in Abrechnung kommen?

8) Eine Waldung wurde in 10 Jahren durch jährliche Hiebe vollständig abgeholzt. Ein Jahr vor dem ersten Holzhieb enthielt dieselbe 13000 Klafter, und der Zuwachs betrug $2\frac{1}{2}$ Procent; wie viele Klafter wurden jährlich geschlagen?

9) Ein Verschwender hat sein Vermögen von 80000 fl., welches zu 4 % angelegt war, in 20 Jahren sammt den Zinsen durchgebracht; wie viel brauchte derselbe durchschnittlich jährlich zu seinen Bedürfnissen?

10) Auf wie lange kann **N** eine Rente von 800 fl. beziehen, wenn er 13830 fl. baar dafür entrichtet und die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden?

11) Suchet eine allgemeine Formel für die Zahl der Jahre, welche ein Capital **a** nöthig hat, um zum Zinsfuß **p** auf die Summe **s** anzuwachsen, wenn jährlich eine Summe **r** dazu gelegt oder hinweggenommen wird.

12) Es hat Jemand ein Vermögen von 9390 fl., welches er jährlich um 1400 fl. vermehrt, außer den Zinsen. Wenn nun Alles zu 4 Procent angelegt wird, nach wie viel Jahren wird sein Vermögen 25750 fl. betragen?

13) Eine Gemeinde legt zum Neubau einer Kirche, wozu 60000 fl. nöthig sind, jährlich 1000 fl. an, welche zu $4\frac{1}{2}$ Procent verzinst

werden; nach wie vielen Jahren wird die Kirche gebaut werden können?

14) Ein Grundeigenthümer will den auf seinen Gütern lastenden Zehnten ablösen, wofür die Verwaltung an denselben ein baares Capital von 3000 fl. fordert; das er, im Falle er keine Baarzahlung leistet, zu 4 Procent verzinsen muß. Er trägt nun jährlich 500 fl. an der Ablösungssumme ab, wie viele Jahre muß er diese Zahlung leisten?

15) Es hat Jemand ein Vermögen von 43225 fl., welches zu 4 Procent angelegt ist. Wenn nun derselbe jährlich zu seinem Aufwand 2500 fl. braucht; und außer diesem Vermögen kein Einkommen mehr besitzt; nach wie viel Jahren wird er kein Vermögen mehr besitzen?

16) Nach einem Testamente erhält A 10000 fl. unter der Bedingung, daß er während 20 Jahren dem B jährlich so viel geben muß, daß ihm mit den Zinsen und Zinseszinsen am Ende des 20ten Jahres noch 8000 fl. übrig bleiben; welche dann A als reines Eigenthum zufallen. Wie viel hat B jährlich an A zu fordern; oder, falls ein Vergleich statt finden kann, mit welchem Capital kann A seine Verpflichtung baar abkaufen, wenn man 5 % Zinsen rechnet?

17) Ein Wald wurde vor 12 Jahren zu 18000 Klaftern abgeschätzt und seit dieser Zeit wurde kein Holz gehauen; wenn man nun annimmt, daß der Holzzuwachs $2\frac{1}{4}$ Procent jährlich beträgt, wie viele Klafter dürfen jetzt jährlich geschlagen werden, wenn der Holzbestand in weiteren 19 Jahren = 15000 Klaftern sein soll?

18) Es besitzt Jemand ein Vermögen von 1200 fl., welches zu 4 % angelegt ist; die Zinsen desselben werden jedes Jahr in die Sparkasse gelegt (weil sie zu anderweitiger Verwerthung zu klein sind). Am Ende des 5ten Jahres nimmt er aus der Sparkasse 200 fl. heraus und leiht diese zu 6 % aus, legt aber wie bisher wieder alle Zinsen in die Sparkasse, welche 3 Procent Zinsen gibt. Wie groß ist sein Vermögen am Ende des 10ten Jahres (vom Anfang an gerechnet)?

19) Eine Schuld soll nach folgendem Plane getilgt werden: Nach 4 Jahren sollen 1000 fl., nach 3 weiteren Jahren wieder 1000 fl. und vom Ende des 10ten Jahres an jährlich 500 fl. bezahlt werden; wenn nun die Schuld nach 6 solchen Terminalzahlungen, also am Ende des 16ten Jahres getilgt ist; wie groß war dieselbe; wenn man 4 % Zinsen rechnet.

20) Im Staate Ohio (ein nordamerikanischer Freistaat) leben jetzt ungefähr eine Million Menschen; es wandern aber jährlich etwa 2500 Menschen aus Deutschland und anderen Ländern aus, welche sich dort niederlassen. Wenn nun von 36 Menschen jährlich einer stirbt und auf 28 jährlich eine Geburt kommt; nach wie vielen Jahren wird dieser Staat (wenn die Verhältnisse dieselben bleiben) $1\frac{1}{2}$ Millionen Einwohner haben?

21) Ein Capital von 15000 fl., welches zu 4 Procent ausgeliehen war, ist in einer gewissen Zeit um 20000 fl. größer geworden als das angewachsene Capital einer jährlich fälligen Summe von

700 fl., welche zu $3\frac{1}{2}$ Procent angelegt und die nämliche Zeit hindurch bezogen wurde. Wie lange waren beide ausgeliehen?

22) Eine Schuld von 16000 fl. soll durch Terminalzahlungen von je 2000 fl., welche am Ende eines jeden Jahres geleistet werden, getilgt werden. Wenn nun der Zinsfuß zu 5 % angenommen worden, wie viele solche Zahlungen müssen statt finden; und falls die Anzahl der Zahlungen keine ganze Zahl ist, wie groß muß die letzte sein, um die Schuld in einer ganzen Anzahl von Jahren zu tilgen?

23) Wenn nun aber erst am Ende des 11ten Jahres der Rest abgetragen werden soll; wie groß ist dieser dann?

24) Eine Rente von 560 fl. wird 12 Jahre lang bezahlt, wenn der Rentenirer eine Mise von 5000 fl. baar entrichtet, zu wie viel Procent wurde der Zinsfuß bei der Berechnung der Rente angenommen?

25) Zu einer Summe von 1000 fl. kamen jährlich noch 140 fl. und zwar 10 Jahre lang; wenn nun das ganze Capital am Ende des 10ten Jahres 3052 fl. 56 kr. beträgt, zu wie viel Procent waren die Gelder angelegt?

26) Es verwendet Jemand jedesmal am Ende des dritten Jahres zum Ankauf von Liegenschaften 1500 fl., wie hoch belaufen sich die verwendeten Summen am Ende des 15ten Jahres; wenn 4 % Zinseszinsen gerechnet werden?

27) **A** empfängt vierteljährig 200 fl. Besoldung, wie groß ist die Summe aller in 10 Jahren bezogenen Besoldungen am Ende des 10ten Jahres, wenn $4\frac{1}{2}$ Procent Zinseszinsen berechnet werden?

28) **N** hat sich verpflichtet, dem **P** alle zwei Jahre 100 fl. zu bezahlen und diese Zahlung fünfmal zu leisten (oder 10 Jahre lang); mit welchem baaren Capital könnte er diese Schuld abtragen; wenn 5 Procent Disconto gerechnet werden?

29) Ein Hausbesitzer verwendete alle zwei Jahre 250 fl. auf sein Haus, nach 9 Jahren will er dasselbe verkaufen und berechnet nun behufs der Preisbestimmung die auf dasselbe verwendeten Summen zu 5 % Zinseszinsen; wie hoch belaufen sich diese?

Weitere Aufgaben über Rentenrechnung, wenn die Renten zu oder abnehmen, so wie über Leibrenten siehe Theil II.

Algebra.

Von den Gleichungen des ersten und zweiten Grades.

Lehre von den Gleichungen.

A. Einleitung.

§. 1. Benennung der Gleichungen.

a) Wenn man den Werth einer Größe auf doppelte Weise ausdrückt, und beide Formen einander gleichsetzt; so entsteht eine Gleichung. Z. B.

$$13a - 2a = 6a + 5a.$$

b) Eine Gleichung, in welcher die eine Seite nur eine Entwicklung der andern ist, nennt man eine analytische oder identische. Z. B.

$$2a + a = 3a.$$

Eine solche Gleichung muß richtig bleiben, welche Werthe man auch den allgemeinen Größen beilegen mag. Z. B.

Es sei $a = 1$, so ist $2 . 1 + 1 = 3 . 1$.
" " $a = 12$, " " $2 . 12 + 12 = 3 . 12$.

c) Gleichungen, in welchen die eine Seite nicht durch Entwicklung der anderen gebildet werden kann, nennt man Bedingungsgleichungen.

Z. B. $3a = 4b$ enthält die Bedingung, daß das Dreifache einer Größe = dem 4fachen einer andern sein soll; ändert man den Werth von b, so wird auch a geändert. Z. B. wird $b = 3$, so muß $a = 4$ sein; oder wenn $b = 6$, so ist $a = 8$ u. s. w.

d) Wenn in einer Gleichung bekannte Größen mit unbekannten so verbunden sind, daß man den Werth der unbekannten hieraus bestimmen kann, so nennt man dieselbe eine numerische oder Zahlengleichung, wenn die gegebenen Größen Zahlen sind. Sind aber die gegebenen Größen Buchstaben (allgemeine Größen), so ist die Gleichung eine algebraische oder Buchstabengleichung.

Man bezeichnet die Unbekannten gewöhnlich mit den Endbuchstaben des Alphabets, z. B. x, y, z, u, v, die bekannten Größen aber mit den Anfangsbuchstaben a, b, c .... oder durch Zahlen.

e) Eine Gleichung kann eine oder mehrere Unbekannte enthalten und diese können wieder in beliebigen Potenzen erscheinen; man unterscheidet in diesen Beziehungen in Gleichungen mit einer und in solche mit mehreren Unbekanten; und in Gleichungen vom ersten, 2ten, 3ten .... Grade, je nachdem der höchste Exponent der Unbekannten 1, 2 oder 3 .... ist.

Die Gleichungen vom ersten Grade heißen auch einfache, die vom 2ten Grade quadratische, die des 3ten Grades cubische, die Gleichungen des 4ten Grades biquadratische.

Die Gleichungen des ersten und 2ten Grades nennt man niedere, die übrigen höhere Gleichungen.

Erscheint in einer Gleichung nur eine Potenz der Unbekannten, so nennt man dieselbe eine reine, im andern Fall aber eine gemischte, unreine oder verwickelte.

Z. B. $3x+4y+2z=5$ ist eine Gl. des ersten Grades mit 3 Unbek.

$13x^2+7x=500$ " " " " 2ten " " 1 " und zwar eine unreine.

$7x^3=593$ ist eine reine cubische Gleichung

$ax^2+by=cy^3$ " " unreine " " mit 2 unbekannten Größen.

Die unbekannten Größen nennt man auch Wurzeln der Gleichung (weil sie bei den Gleichungen des 2ten, 3ten ... Grades durch Wurzelausziehung gefunden werden); und die Auffindung der Wurzeln geschieht durch die sogenannte Auflösung der Gleichungen.

§. 2. Umformung der Gleichungen.

Wenn zu zwei gleichen Größen gleiche Größen addirt oder von jenen subtrahirt werden, so entstehen wieder gleiche Größen; ebenso wenn man beide mit Gleichem multiplicirt oder dividirt. Eine Gleichung bleibt daher immer noch richtig, wenn man eine der vier angegebenen Veränderungen vornimmt.

Man kann auch mehrere Gleichungen mit einander multipliciren oder in einander theilen (jede Seite der einen mit einer Seite der andern).

Auf obige Sätze gründen sich nun folgende Umformungen:

1) Man kann jede Größe von der einen Seite auf die andere versetzen, wenn man das Zeichen der Größe umkehrt.

Beweis. Es sei: $a+x-c=b$.
Man denke sich **a** von beiden Seiten abgezogen und **c** auf beiden addirt, so folgt:

$a + x - c - a + c = b - a + c, \quad x = b + c - a$

$+ a$ ist also als $- a$, und $- c$ als $+ c$ auf die andere Seite gekommen.

2) Man kann in jeder Gleichung die Zeichen aller Größen umkehren.

Beweis. $- x^3 + ax^2 - bx = - c.$

Man denke sich die Gleichung auf beiden Seiten mit $- 1$ multiplicirt, so folgt: $x^3 - ax^2 + bx = c.$

3) Wenn eine Gleichung Brüche enthält, so multiplicire man dieselbe mit dem Generalnenner der Brüche, dann fallen alle Nenner weg.

Z. B. $\frac{3}{4}x + \frac{5y}{3} = \frac{7}{9} + 5$, mit 36 multiplicirt gibt:

$$\frac{36 . 3x}{4} + \frac{36 . 5y}{3} = \frac{36 . 7}{9} + 5 . 36, \text{ oder:}$$

$$27x + 60y = 28 + 180 = 208.$$

Man theile mit jedem Nenner in den Hauptnenner und multiplicire den Quotienten mit dem Zähler (wobei man die Ganzen als Brüche betrachten kann, deren Nenner $= 1$ ist).

Ein anderes Verfahren ist folgendes:

Man bringt beide Seiten der Gleichung auf gleiche Nenner und läßt dann die Nenner weg; weil gleiche Brüche mit gleichen Nennern auch gleiche Zähler haben müssen.

4) Haben beide Seiten einer Gleichung einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann dieser weggelassen werden (man denke sich nämlich beide Seiten durch denselben getheilt). Die Gleichung wird hierdurch abgekürzt.

Z. B. $a^3x^3 + a^2x = a^4x^2$ gibt: $a^2x(ax^2 + 1) = a^4x^2$, durch a^2x getheilt gibt: $ax^2 + 1 = a^2x$.

Einige andere Umformungen werden später gezeigt.

B. Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe.

§. 1. Allgemeine Auflösung.

Die allgemeine Form derselben ist: $ax = b$, wird nun mit a getheilt, so folgt: $x = \frac{b}{a}$.

Jede Gleichung wird nun auf die Form $ax = b$ gebracht (durch Anwendung der Sätze A. §. 2).

Beispiele.

1) $7 + 3x + 2x = 29 - 6x$.

A. §. 2, 1 angewendet, so folgt: $3x + 2x + 6x = 29 - 7$, die Größen addirt, gibt: $11x = 22$, $x = \frac{22}{11} = 2$.

2) $5x - \frac{8}{3} + \frac{13x}{4} = 4\frac{1}{2} + \frac{2x}{3}$

(Hauptnenner = 12). A. §. 2, 3 angewendet, gibt:

$60x - 32 + 39x = 54 + 8x$

geordnet! $60x + 39x - 8x = 32 + 54$

addirt! $91x = 86$, also $x = \frac{86}{91}$.

Oder: Man ordne die Gleichung zuerst und bringe die Brüche und Ganzen auf gleiche Benennung, wie folgt:

$$5x + \frac{13x}{4} - \frac{2x}{3} = 4\frac{1}{2} + \frac{8}{3}.$$

$$\frac{60x + 39x - 8x}{12} = \frac{27 + 16}{6}, \quad \frac{91x}{12} = \frac{43}{6},$$

$$x = \frac{43}{6} : \frac{91}{12} = \frac{43 \cdot 12}{6 \cdot 91} = \frac{86}{91}.$$

Oder $\frac{60x + 39x - 8x}{12} = \frac{27 + 16}{6} = \frac{86}{12}$,

daher auch: $60x + 39x - 8x$, oder $91x = 86$, und $x = \frac{86}{91}$.

3) $\frac{a}{x} + \frac{2b}{x} = \frac{4a}{b}$,

Hauptnenner = bx, daher: $ab + 2b^2 = 4ax$,

$$\frac{ab + 2b^2}{4a} = x,$$

4) $ax - b = cx - d$, hieraus $ax - cx = b - d$,

$x(a - c) = b - d$, $x = \frac{b - d}{a - c}$.

5) $0{,}7x + 7{,}82 - 3{,}13x = -4{,}915$,

$0{,}7x - 3{,}13x = -7{,}82 - 4{,}915$,

$-2{,}43x = -12{,}735$ oder (A. §. 2, 2) $2{,}43x = 12{,}735$,

$x = \frac{12{,}735}{2{,}43} = 5{,}2407 \ldots\ldots$

Anmerkung.

Die Probe über die Richtigkeit des Werthes von x wird dadurch geführt, daß man den gefundenen Werth in die ursprüngliche Gleichung setzt, wodurch dann eine identische Gleichung entstehen muß.

Z. B. in der ersten Aufgabe: $x = 2$ in die Gleichung gesetzt, gibt: $7 + 3 . 2 + 2 . 2$ und $29 - 6 . 2$

oder: $7 + 6 + 4$ und $29 - 12$, oder $17 = 17$.

§. 2. Aufgaben.

Löset folgende Gleichungen auf!

1) $x + 8 = 15$, $2x - 12 = 25$, $4x + 9x = 26$.

2) $2x + 5 = 4x - 17$, $9x - 2x + 8 = 12x - 3x + 4$.

3) $ax + bx = c$, $m^2x - n = px - q^2$.

4) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$, $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{2}{x} + \frac{5}{x} = 7$.

5) $0{,}4x - 3{,}7x - 8 = -4{,}1x + 20 - 2x$.

6) $30x - 4x - 0{,}8 = -9\frac{1}{2}x + 7\frac{9}{10}$.

7) $(x + 2)(3 - x) = (5 + x)(7 - x)$.

8) $(a - x)b + ac = c(2x - a)$.

9) $\frac{a}{a + b} + \frac{x}{a - b} = \frac{a^2 + bx}{a^2 - b^2}$.

10) $\frac{3 + x^2}{5 - 2x} + 5 = -\frac{x}{2}$.

11) $\frac{5x}{4} - \frac{2x}{3} - \frac{8x}{9} = -45 + \frac{17x}{18}$.

12) $\frac{2}{3}\left(6 + \frac{x^2}{2}\right) + 10\left(\frac{5}{4} + \frac{2x}{3}\right) = -\frac{5x}{3}\left(5 - \frac{x}{5}\right)$.

13) $ax^{n+1} - bx^n = c(x^n - x^{n+1})$.

14) $\frac{x-4}{x+9} = \frac{x+2}{x+54}$, $\frac{3a-x}{b-x} = \frac{a}{b-2a}$.

15) $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$.

16) $(8-3x)^2 + 16(1-x)^2 = (9-5x)^2$.

17) $\frac{a+x}{6b-x} + \frac{x-a}{6b+x} = \frac{6ab}{36b^2-x^2}$.

Prüfet die Resultate in allen vorhergehenden Aufgaben durch Substitution der Werthe von x!

§. 3. Gleichungen mit Wurzelgrößen.

Wenn eine Gleichung Wurzelgrößen enthält, so beseitigt man diese dadurch, daß die Gleichung in die sovielte Potenz erhoben wird, als der gemeinschaftliche Wurzelexponent angibt.

In manchen Fällen muß dieses Verfahren mehrmals angewendet werden.

Beispiele.

1) $3 + \sqrt{(2+x^2)} = x$.

Man verändere die Gleichung so, daß die Wurzel allein auf eine Seite kommt, so folgt: $\sqrt{(2+x^2)} = x - 3$. Man erhebe nun beide Seiten ins Quadrat, so erhält man:

$$2 + x^2 = (x-3)^2, \quad 2 + x^2 = x^2 - 6x + 9;$$

oder $6x = 7$, daher: $x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Anmerkungen.

1) Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht darauf, daß wenn 2 Größen gleich sind, auch gleich hohe Potenzen derselben gleich sein müssen.

2) Hätte man die Gleichung in der anfänglichen Form quadrirt, so wäre $9 + 6\sqrt{(2+x^2)} + 2 + x^2 = x^2$ entstanden, die Wurzel wäre daher nicht weggefallen.

3) Die Gleichung wird in vielen Fällen, wenn die Wurzeln weggebracht werden, eine Gleichung vom 2ten oder eine solche von höherem Grad.

2) $\sqrt{(x+9)} = 2 + \sqrt{(x-7)}$

quadrirt gibt: $x + 9 = 4 + 4\sqrt{(x-7)} + x - 7$

oder: $12 = 4\sqrt{(x-7)}$, $3 = \sqrt{(x-7)}$

quadrirt: $9 = x - 7$, folglich $16 = x$.

3) $\sqrt[3]{(a+x)} = \sqrt[4]{(a+x)}$.

In die 12te Potenz erhoben, gibt: $\sqrt[3]{(a+x)^{12}} = \sqrt[4]{(a+x)^{12}}$

oder $(a+x)^4 = (a+x)^3$, mit $(a+x)^3$ getheilt,

gibt: $1 = a + x$, $x = 1 - a$.

Oder, theile durch $\sqrt[4]{(a+x)}$,

so folgt: $\sqrt[12]{\frac{(a+x)^4}{(a+x)^3}} = 1$;

oder $\sqrt[12]{(a+x)} = 1$, daher auch $a + x = 1^{12} = 1$.

4) $\sqrt[3]{(20x^2 - 8x^3)} + 2x = \frac{5}{3}$.

Setze: $\sqrt[3]{(20x^2 - 8x^3)} = \frac{5}{3} - 2x$,

in die 3te Potenz erhoben, gibt:

$$20x^2 - 8x^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 3 . \left(\frac{5}{3}\right)^2 . 2x + 3 . \frac{5}{3}\left(2x\right)^2 - \left(2x\right)^3,$$

oder $20x^2 - 8x^3 = \frac{125}{27} - \frac{50}{3}x + 20x^2 - 8x^3$.

also: $\frac{50}{3}x = \frac{125}{27}$, und $x = \frac{125}{27} . \frac{3}{50} = \frac{5}{18}$.

5) $3x + \sqrt{3} = 2\sqrt{7}$.

In dieser Gleichung ist kein x unter der Wurzel; man erhebt diese auch nicht in die 2te Potenz; sondern die Wurzeln werden ausgezogen, und man erhält:

$3x + 1{,}732051 = 5{,}291502\ldots$, also $x = 1{,}1864836\ldots$.

Anmerkung.

Wenn beide Seiten einer Gleichung als Potenzen erscheinen, so kann man dieselbe in manchen Fällen abkürzen.

Z. B. $(a + dx)^4 = (c + d^2x^2)^2$,

man ziehe die Quadratwurzel aus beiden Seiten, so muß die Gleichung $(a + dx)^2 = c + d^2x^2$ immer noch richtig sein, weil gleiche Wurzeln aus gleichen Größen gleich sind.

Man erhält dann: $a^2 + 2adx + d^2x^2 = c + d^2x^2$,

oder $2adx = c - a^2$, $x = \frac{c - a^2}{2ad}$.

§. 4. Aufgaben.

Findet die Werthe von x aus folgenden Gleichungen.

1) $3\sqrt{(x-7)} = 15$, $a\sqrt{(b+x)} = cd$.

2) $\sqrt{(x^2+13)} = 13 - x$. $c\sqrt{(x^2+a)} = b - cx$.

3) $2\sqrt{2x+19} = 23$, $\sqrt{(24+x)} = 2 + \sqrt{x}$.

4) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{x} = 2\sqrt{(x+7)}$, $5a\sqrt{b} - 3c\sqrt{ax} = 2a$.

5) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \frac{b}{a}$, $\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}{\sqrt{2x}+\sqrt{5}} = \frac{8}{5}$.

6) $\sqrt[4]{(a^2x^2 - b^2)} = \sqrt{(ax+b)}$.

7) $\sqrt{(3x-3)} \cdot \sqrt{(x+5)} = (2+\sqrt{3x}) \cdot \sqrt{(x-1)}$.

8) $(x+3)^4 = (x^2+1)^2$.

§. 5. Anwendung der Gleichungen zur Lösung von Aufgaben.

Mit Hülfe der Gleichungen lassen sich viele Rechnungsfragen der gewöhnlichen Zahlenrechnung auf kürzere Weise lösen als durch letztere.

Auch in der Geometrie und in anderen Theilen der Mathematik werden die Gleichungen angewendet, um, in Verbindung mit den dort abgeleiteten Sätzen, unbekannte Größen oder neue Sätze zu finden. Es lassen sich über die Bildung der Gleichungen, welche zur Lösung von Aufgaben benutzt werden sollen, nur wenige allgemeine Regeln geben; Uebung und richtige Auffassung der verschiedenen Aufgaben sind hier unerläßlich.

Im Allgemeinen gelten folgende Sätze:

1) Man untersuche, ob nur eine oder mehrere unbekannte Größen in der Aufgabe vorkommen, und ob im 2ten Falle die Unbekannten sich in einer derselben ausdrücken lassen; ist dies der Fall, so hat man nur eine Unbekannte anzunehmen, durch deren Auffindung auch die anderen bestimmt werden.

2) Die unbekannte Größe wird durch x bezeichnet und man sucht nun aus dem gegebenen Zusammenhange, in welchem die bekannten Größen zur Unbekannten stehen, zwei, dem Werthe nach gleiche Ausdrücke zu bilden, durch deren Gleichsetzung man alsdann eine Gleichung erhält, aus welcher sich die Unbekannte finden läßt.

Bei mehreren Unbekannten wird auf gleiche Weise verfahren.

In manchen Fällen wird die Rechnung einfacher, wenn man nicht die zu findende Größe selbst, sondern eine andere, mit dieser zusammenhängende Größe (durch welche die Unbekannte sich leicht bestimmen läßt) als x annimmt.

Diophantus von Alexandrien, welcher in der Mitte des 4ten Jahrhunderts lebte, war der erste, welcher die Gleichungen anwendete, er benutzte jedoch nur Zahlengleichungen und zwar unbestimmte, siehe C. §. 1. a.

Später beschäftigten sich die Araber mit den Gleichungen, Ben-Musa soll im 9ten Jahrhundert die Auflösung der quadratischen Gleichungen gefunden haben, und erst im 15ten Jahrhundert wurde dieser Theil der Mathematik durch Leonard von Pisa und Lukas de Burgo und im 16ten durch Ferrari, Tartaglea und Cardanus erweitert und verbreitet. Christoph Rudolph und Stifel waren die ersten deutschen Mathematiker, welche im 16ten Jahrhundert über die Lehre von den Gleichungen und deren Anwendung schrieben. Faulhaber aus Ulm und andere schrieben im 17ten Jahrhundert über diese Lehre; die eigentliche allgemeine Anwendung der Gleichungen zeigte jedoch erst Descartes in der Mitte des 17ten Jahrhunderts. Er bezeichnete die bekannten und unbekannten Größen so wie es jetzt noch üblich ist und wendete die Gleichungen auf die Geometrie an, während die früheren Mathematiker die Gleichungen mehr zur Auflösung von Rechenräthseln benutzten.

§. 6. Auflösung von Aufgaben, welche auf Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten führen.

1) Es soll eine Zahl gefunden werden, deren 6faches um 55 größer ist als die Hälfte der Zahl.

Erste Auflösung. Man bezeichne die Zahl mit x, so ist das 6fache derselben $= 6x$, und ihre Hälfte $= \frac{x}{2}$, zählt man nun zu $\frac{x}{2}$ die Zahl 55, so sind der Angabe nach folgende beiden Werthe gleich:

$$6x = \frac{x}{2} + 55.$$

2te Auflösung. Wenn das 6fache um 55 größer ist als die Hälfte der Zahl, so muß man vom 6fachen 55 abziehen, um die Hälfte zu erhalten, daher:

$$6x - 55 = \frac{x}{2}.$$

3te Auflösung. Aus der Angabe folgt, daß der Unterschied zwischen dem 6fachen und der Hälfte $= 55$ ist, daher:

$$6x - \frac{x}{2} = 55.$$

Diese 3 Gleichungen sind nur in der Form verschieden, und man erhält $x = 10$.

Ohne Gleichung läßt sich die Aufgabe auf folgende Weise lösen: Der Unterschied zwischen dem 6fachen und der Hälfte einer Zahl ist $= 5\frac{1}{2}$ mal der Zahl, oder $= \frac{11}{2}$ der Zahl, wenn nun $\frac{11}{2}$ der Zahl $= 55$ sind, so muß $\frac{1}{2}$ der Zahl $= 5$ und die Zahl daher $= 2 . 5 = 10$ sein.

2) A und B besitzen zusammen 90 fl. und A hat 18 fl. weniger als die doppelte Summe des B beträgt; wie viel besitzt jeder?

Erste Auflösung. B habe x, so ist die doppelte Summe des B $= 2x$ und A besitzt daher $2x - 18$, beide zusammen haben aber 90 fl., daher ist:

$$x + 2x - 18 = 90,\ \text{woraus}\ x = 36.$$

B hat daher 36 fl. und A $2 \cdot 36 - 18 = 54$ fl., oder A hat $90 - 36 = 54$ fl.

2te Auflösung. A hat x fl., so hat B $90 - x$, das Doppelte von B ist $2(90 - x)$, daher besitzt A $2(90 - x) - 18$ fl., werden nun beide Werthe für den Antheil des A gleich gesetzt, so erhält man: $x = 2(90 - x) - 18$, woraus $x = 54$ u. s. w.

Ohne Gleichung wird die Aufgabe auf folgende Art gelöst: B hat einen Theil, A aber 2 Theile der Summe, weniger 18 fl., also beide zusammen 3 Theile — 18 fl., welche Summe 90 beträgt. Die 3 Theile müssen daher 90 + 18 oder 108 betragen, und 1 Theil daher $\frac{108}{3} = 36$, B hat aber einen Theil, also 36 fl. und A den Rest oder 54 fl.

3) Ein Courier legt in jeder Stunde eine Meile zurück; 10 Stunden später wird ihm ein anderer von demselben Orte aus nachgeschickt, um ihn einzuholen, dieser reist wie der erste Tag und Nacht hindurch und macht in 2 Stunden 3 Meilen; wann wird er den ersten treffen?

Erste Auflösung. Der 2te brauche x Stunden bis zum Zusammentreffen, so ist der erste $x + 10$ Stunden unterwegs, der 2te hat in dieser Zeit $1\frac{1}{2}x$ Meilen und der erste $(x + 10) \cdot 1$ Meilen zurückgelegt, weil jener in jeder Stunde $1\frac{1}{2}$ und dieser 1 Meile macht; beide haben aber gleiche Wege zurückgelegt, daher die Gleichung:

$$1\frac{1}{2}x = x + 10,\ \text{woraus}\ x = 20.$$

Der 2te holt also den ersten in 20 Stunden ein.

2te Auflösung. Wenn die Wege gleich sind, so verhalten sich die Zeiten umgekehrt wie die Geschwindigkeiten, daher:

$$x : x + 10 = 1 : 1\frac{1}{2},\ \text{woraus}\ \frac{3}{2}x = x + 10\ \text{folgt u. s. w.}$$

3te Auflösung. Der Ort des Zusammentreffens liege x Meilen von dem Orte, von welchem beide abgereist sind, so braucht der erste, um diese Entfernung zurückzulegen, x Stunden, der zweite braucht zu 3 Meilen 2 Stunden, also zu einer Meile $\frac{2}{3}$ Stunden und zu x Meilen $\frac{2}{3}x$ Stunden. Da nun der erste 10 Stunden

länger unterwegs ist, so muß zu der Zeit, welche der 2te braucht, noch 10 addirt werden, um die Zeit zu erhalten, welche der erste braucht; mithin:

$$x = \frac{2}{3}x + 10, \text{ woraus } x = 30.$$

Der Ort des Zusammentreffens ist daher 30 Meilen entfernt und **B** braucht zu diesem Wege 20 Stunden, weil er 3 Meilen in zwei Stunden zurücklegt.

Ohne Gleichung. Der erste hat einen Vorsprung von 10 Meilen, weil er in jeder Stunde eine Meile zurücklegt und 10 Stunden früher abreist. Diesen muß der 2te dadurch einholen, daß er in jeder Stunde eine halbe Meile mehr zurücklegt als der erste, er braucht also, um eine halbe Meile einzuholen, 1 Stunde und daher zu 10 Meilen 20 Stunden.

4) Ein Weinhändler mischt 2 Sorten Wein, von der ersten ist jede Maaß 48 kr. und von der 2ten jede Maaß 24 kr. werth, und die ganze Mischung enthält 135 Maaß, wovon jede 32 kr. werth ist; wie viel hat er von jeder Sorte zur Mischung genommen?

Erste Auflösung. Es seien x Maaß von der ersten Sorte, so sind von der 2ten **135 — x** Maaß in der Mischung. Der Werth der ersten ist daher $= 48x$, und der von der 2ten $= 24(135 - x)$; beide zusammen aber sind **135 . 32** kr. werth, mithin:

$$48x + 24(135 - x) = 135 . 32,$$

Hieraus findet man $x = 45$, es sind also 45 Maaß von der ersten und **135 — 45** oder **90** Maaß von der zweiten Sorte in der Mischung.

2te Auflösung. Es seien x Maaß von der 2ten Sorte in der Mischung, so sind diese **24x** kr. werth, und wenn man diese Summe von dem Werthe der ganzen Mischung oder von **32 . 135** abzieht, so bleibt der Werth der ersten Sorte, daher ist dieser $= 23 . 135 - 24x$, diesen durch 48 kr. getheilt, gibt die Anzahl der Maaße, welche von der ersten Sorte genommen wurden, diese ist daher

$$= \frac{32 . 135 - 24x}{48} \text{ Maaß;}$$

hierzu die x Maaße wie der 2ten gezählt gibt die ganze Mischung oder 135 Maaß, mithin:

$$\frac{32 . 135 - 24x}{48} + x = 135, \text{ woraus } x = 90 \text{ u. s. w.}$$

Ohne Gleichung wird die Aufgabe durch die sogenannte Mischungsregel gelöst.

48		8	oder 1 Theil
	32		
24		16	und 2 „
		zusammen	3 Theile = 135.

$$1 \text{ Theil} = \frac{135}{3} = 45 \text{ u. s. w.}$$

5) Die Hälfte von der Gemarkung einer Gemeinde besteht aus Ackerfeld, $\frac{1}{4}$ aus Wiesen, $\frac{1}{5}$ ist Wald und das Uebrige besteht in Gebäulichkeiten, Wegen und Gärten u. s. w., und nimmt einen Raum von 200 Morgen ein. Wie groß ist die Gemarkung und wie viel Feld, Wiesen und Wald enthält dieselbe?

Auflösung. Sie sei x Morgen groß, so enthält sie $\frac{x}{2}$ Ackerland, $\frac{x}{4}$ Wiesen, $\frac{x}{5}$ Wald und noch weitere 200 Morgen, welche zusammen die ganze Gemarkung, also x Morgen ausmachen, daher:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 200 = x, \text{ hieraus } x = 4000.$$

Die ganze Gemarkung enthält daher 4000 Morgen, hievon sind

	$\frac{4000}{2} =$	2000	Morgen Feld,
	$\frac{4000}{4} =$	1000	" Wiesen,
und	$\frac{4000}{5} =$	800	" Wald,
dazu noch		200	" Gebäulichkeiten u. s. w.
	gibt	4000	Morgen,

Ohne Gleichung. Man findet, daß die Gebäulichkeiten u. s. w. $\frac{1}{20}$ der Gemarkung einnehmen, denn die anderen Theile sind zusammen:

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20};$$

wenn nun $\frac{1}{20}$ der Gemarkung 200 Morgen beträgt, so muß diese $20 \,.\, 200 = 4000$ Morgen enthalten u. s. w.

6) Zwei Kaufleute legen zu einem Handelsgeschäfte verschiedene Summen zusammen; der erste gibt 1000 fl. weniger als der zweite, und läßt sein Geld 6 Monate lang im Geschäfte, während der 2te sein Capital einen Monat früher zurückzieht. Wenn nun nach dem zusammengesetzten Verhältniß der Einlage und Zeit der erste 960 und der zweite 1000 fl. vom Gewinn erhält; wie viel hat jeder eingelegt?

Auflösung. Der erste habe x fl. eingelegt, so hat der zweite $x + 1000$ fl. gegeben, dieser auf 5 und jener auf 6 Monate, die Verhältnißzahlen der Gewinne sind daher $x \,.\, 6$ und $(x + 1000) \,.\, 5$, mithin die Proportion: $6x : 5(x + 1000) = 960 : 1000$.

Hieraus die Gleichung: $6000x = 4800(x + 1000)$,

woraus $x = 4000$ und der 2te hat daher 5000 fl. gegeben.

Ohne Gleichung.
1) Durch die Gesellschaftsrechnung wäre diese Aufgabe nur auf einem sehr langwierigen Wege zu lösen, da das ganze Capital nicht bekannt ist.
2) Durch Proportion findet man Folgendes:

$6x : 5(x + 1600) = 960 : 1000$, hieraus durch Division:

$x : x + 1000 = 16 : 20$ oder:

$x : x + 1000 - x = 16 : 20 - 16$ nach V. §. 3. k

oder: $x : 1000 = 16 : 4$, $x : 1000 = 4 : 1$, $x = 4000$.

7) Wenn man jede Seite eines Quadrats um 7 Fuß vergrößert, so ist der Inhalt des 2ten Quadrats um 189 Fuß größer als der des ersten; wie groß sind beide Inhalte?

Erste Auflösung. Setze den Inhalt des ersten Quadrats $= x$; so ist der des zweiten $= x + 189$, ihre Seiten aber sind $= \sqrt{x}$ und $\sqrt{(x + 189)}$ (siehe III. §. 3. Aufg. 13 Anmerkung), und da die erste um 7 kleiner ist, als die zweite, so muß $\sqrt{x} = \sqrt{(x + 189)} - 7$ sein. Hieraus nach §. 3, $x = 100$. Das erste Quadrat enthält daher 100 und das 2te 289 Fuß.

2te Auflösung. Die Seite des ersten Quadrats sei $= x$, so ist der Inhalt $= x^2$, die Seite des 2ten $= x + 7$ und sein Inhalt $= (x + 7)^2$, diese 2 Inhalte sind aber um 189 unterschieden, folglich:

$$(x + 7)^2 - x^2 = 189, \text{ hieraus } x = 10.$$

Daher ist das erste Quadrat $= 10^2 = 100$ und das 2te $= 289$.

Ohne Gleichung. Man betrachte die in Abschn. II. §. 8. gezeichnete Figur, so ist dort a die Seite des ersten unbekannten Quadrats, und b ist $= 7$. Die Vergrößerung des ersten Quadrates besteht aus 2 Rechtecken und einem Quadrate, letzteres hat 49 Fuß Inhalt (Seite $= 7$ Fuß), daher sind die 2 Rechtecke noch 140 Fuß ($189 - 49$), also hat jedes 70 Fuß, da ein solches Rechteck aber 7 Fuß Breite hat, so muß seine Länge $\frac{70}{7} = 10$ Fuß sein; diese Länge ist aber zugleich die Seite des ersten Quadrates; daher ist dieses $= 100$ und das 2te $= 289$.

Dieses Verfahren führt uns zugleich auf eine weitere Auflösung durch eine Gleichung. Man nenne die Seite des ersten Quadrats $= x$, so ist die Vergrößerung $= 7x + 7x + 49$, diese ist aber $= 189$, mithin

$$14x + 49 = 189, \quad x = 10 \text{ u. s. w.}$$

8) Von einer Summe Geldes wird zuerst 30 fl. mehr als der 4te Theil weggenommen, alsdann werden wieder 80 fl. zugelegt. Wenn man nun von der neuen Summe wieder den fünften Theil und dann noch weitere 100 fl. wegnimmt, und bei der Zählung des Restes findet, daß dieser die Hälfte der anfänglichen Summe beträgt; wie groß war diese?

Erste Auflösung. Die anfängliche Summe sei $= x$, so werden zuerst $\frac{x}{4} + 30$ fl. weggenommen, es bleiben also noch

Rest: $x - \left(\frac{x}{4} + 30\right)$, hiezu kommen 80 fl., daher ist die Summe dann $= x - \left(\frac{x}{4} + 30\right) + 80$, von dieser wird der fünfte Theil weggenommen, also $\frac{x - \left(\frac{x}{4} + 30\right) + 80}{5}$ — dann noch 100 fl., es bleibt also der Rest, welcher $= \frac{x}{2}$ sein soll, daher die Gleichung:

$$x - \left(\frac{x}{4} + 30\right) + 80 - \frac{x - \left(\frac{x}{4} + 30\right) + 80}{5} - 100 = \frac{x}{2}.$$

Hieraus $x - \frac{x}{4} - 30 + 80 - \frac{x}{5} + \frac{x}{20} + 6 - 16 - 100 = \frac{x}{2}$

oder $x - \frac{x}{4} - \frac{x}{5} + \frac{x}{20} - \frac{x}{2} = 30 - 86 - 6 + 16 + 100.$

$\frac{2x}{20}$ oder $\frac{x}{10} = 60$, woraus $x = 600$ fl. = der Summe.

2te Auflösung. Auf folgende Weise erhält man eine einfachere Gleichung: Die Summe sei $= x$, werden nun 30 fl. mehr als $\frac{1}{4}$ weggenommen, so bleiben noch $\frac{3x}{4} - 30$ Rest, dazu 80 fl. gibt $\frac{3x}{4} + 50$; wenn nun von dieser Summe $\frac{1}{5}$ weggenommen wird, so bleiben $\frac{4}{5}$ derselben übrig, daher $\frac{4}{5}\left(\frac{3x}{4} + 50\right)$, und nochmals 100 weggenommen, so ist der Rest

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{3x}{4} + 50\right) - 100 = \frac{x}{2}.$$

Hieraus $\frac{3x}{5} + 40 - 100 = \frac{x}{2}$, $\frac{3x}{5} - \frac{x}{2} = 60$, oder:

$\frac{x}{10} = 60$ und $x = 600$, wie oben.

Ohne Gleichung ist diese Aufgabe auf folgende Weise zu lösen: Zuerst wurden $\frac{1}{4}$ der Summe und noch 30 fl. weggenommen, es bleiben also noch 30 fl. weniger als $\frac{3}{4}$ der Summe übrig; da nun noch 80 fl. dazu kommen, so beträgt die 2te Summe 50 fl. mehr als $\frac{3}{4}$ der ersten, hievon wird der 5te Theil oder 10 fl. mehr als $\frac{3}{20}$ weggenommen und dann nimmt man noch 100 fl. weg, wenn nun alles Weggenommene zusammengezählt wird, so

zeigt sich, daß dieses $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{20}$ der Summe und 140 fl. beträgt; $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{20}$ machen zusammen $\frac{8}{20}$ oder $\frac{2}{5}$, also wurden $\frac{2}{5}$ der Summe und noch 140 fl. weggenommen; und da noch die Hälfte übrig bleibt, so muß $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{2}$ der Summe und 140, oder $\frac{9}{10}$ der Summe und 140 gleich der anfänglichen Summe mehr der hinzugelegten 80 fl. sein, die $\frac{9}{10}$ und 60 fl. müssen demnach die anfängliche Summe bilden; also muß $\frac{1}{10}$ dieser Summe = 60 fl. sein, daher ist die Summe = 600.

Anmerkung.

Diese Auflösung ohne Gleichung ist ziemlich weitläufig, bei vielen Aufgaben wird sie noch weitläufiger, und bei anderen ist keine solche Auflösung möglich.

§. 7. Aufgaben.

1) Das Dreifache einer Zahl ist um 14 größer als die Zahl selbst, wie heißt diese?

2) A besitzt 50 fl. mehr als B und beide zusammen haben 730 fl., wie viel hat Jeder?

3) Es soll eine Zahl gefunden werden, welche die Eigenschaft hat, daß sie von 30 abgezogen denselben Rest gibt, als wenn von ihr 30 abgezogen wird.

4) Wenn man jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks um 6 Fuß größer macht, so wird der Umfang des neuen Dreiecks = 48: wie groß ist die Seite des ersten Dreiecks?

5) A hat 400 fl. mehr als B, und C 300 fl. mehr als A; wenn nun alle 3 zusammen 4100 fl. besitzen, wie viel hat jeder?

6) Das Zwanzigfache einer Zahl beträgt mit dem Sechsfachen derselben zusammengenommen 78, wie heißt die Zahl?

7) Das Schießpulver besteht aus Salpeter, Schwefel und Kohle, von den 2 letzten Stoffen enthält dasselbe gleiche Mengen, der Salpetergehalt ist aber 6mal größer als der Gehalt an Kohle; wie viel Pfunde eines jeden Bestandtheiles sind in 400 Pfund Pulver enthalten?

8) Die Zahl 80 soll in 4 Theile zerlegt werden, von welchen der 2te um 5 und der 3te um 13 größer ist als der erste, der 4te soll aber um 11 kleiner sein als der 2te; wie heißen die 4 Theile?

9) Von welcher Zahl muß man 24 abziehen, damit der Rest gleich dem 5ten Theil der Zahl ist?

10) Welche Zahl muß von 60 abgezogen werden, wenn der Rest halb so groß als die Zahl sein soll?

11) A schenkt von seiner Baarschaft einem Armen 30 kr. und gibt dann noch 50 kr. aus; wenn er nun noch den 3ten Theil seiner anfänglichen Baarschaft übrig hat, wie groß war dieselbe?

12) Ein Weinhändler verkauft zuerst den 5ten Theil seines Weinlagers und dann noch 1800 Maaß; wenn er nun noch 14200 Maaß übrig behält, wie groß war sein Weinvorrath anfangs?

13) Wenn man vom 7ten Theile einer Zahl den 4ten Theil derselben abzieht, so bleiben 15 übrig, wie heißt die Zahl?

14) Die Hälfte einer Zahl ist um 18 größer als der fünfte Theil derselben; findet die Zahl!

15) Von einer Erbschaft soll A $\frac{1}{3}$, B $\frac{2}{9}$. und C den Rest mit 2400 fl. erhalten; wie groß ist dieselbe?

16) Vier Personen, A, B, C und D, haben zusammen 13 fl. 30 kr. verzehrt; nämlich B und C jeder um die Hälfte mehr als A, die Zeche des D ist aber nur halb so groß als die des A. Wie viel beträgt die Zeche eines Jeden?

17) Wenn man eine gewisse Zahl mit 3 multiplicirt, hiezu dann 10 addirt und die Summe durch 5 theilt, so erhält man 14; wie heißt die Zahl?

18) Eine Zahl von folgender Beschaffenheit zu finden: Wenn man dieselbe mit 10 multiplicirt, dann 8 abzieht und den Rest durch 3 theilt; so erhält man die doppelte anfängliche Zahl.

19) Ein Kaufmann verkauft von seinem Zuckervorrath zuerst 30 ℔, dann die Hälfte des Restes und zuletzt noch 100 ℔, da findet er, daß sein ganzer Vorrath verkauft ist; wie groß war derselbe?

20) Es setzt Jemand an der Spielbank seine ganze Baarschaft und erhält das 36fache des Einsatzes wieder zurück; er spielt dann weiter und verliert nun nach und nach wieder 200 fl. Zuletzt setzt er die Hälfte seines noch übrigen Geldes und verliert wieder; er zählt nun sein Geld und findet, daß er immer noch 19 fl. gewonnen hat. Wie groß war sein erster Einsatz?

21) Eine gewisse Zahl wird mit 40 multiplicirt, dann vom Produkte 18 abgezogen und der Rest durch 3 getheilt; hierauf wird 10 addirt; da erhält man eine Zahl, welche um 41 größer ist als die erste, wie heißt diese?

22) A leiht dem B den 3ten Theil seines Geldes und dem C 48 kr. und behält noch 4 fl. 32 kr. übrig; wie viel hatte er anfangs?

23) Eine Zahl zu finden, deren 4ter, 5ter und 6ter Theil zusammen 185 betragen.

24) Die Zahl 500 soll in 2 solche Theile zerlegt werden, daß die Hälfte des ersten und ein Drittheil des 2ten zusammen 200 geben; welches sind die Theile?

25) Zwei Handelsleute, wovon der eine um 1200 fl. reicher ist als der andere, legen zur Betreibung eines Geschäftes 2850 fl. zusammen. Der reichere gab den dritten Theil und der andere den 4ten Theil seines Vermögens her; wie viel besitzt jeder?

26) Es soll eine Zahl gefunden werden, welche folgende Eigenschaft hat: Wenn man sie zu 51 addirt und auch von 51 abzieht, so verhält sich die Summe zum Rest wie 9 : 8.

27) **B** hat 100 fl. mehr als das Doppelte von **A** und die Summen beider verhalten sich wie 67 : 31, wie viel besitzt jeder?

28) Von welcher Zahl müssen der Reihe nach die 3 Zahlen 18, 12 und 3 abgezogen werden, damit die drei dadurch entstehenden Reste eine stetige geometrische Proportion bilden?

29) Zu welcher Zahl muß man die 4 Zahlen 18, 24, 38 und 49 der Reihe nach addiren, damit die 4 Summen eine geometrische Proportion bilden?

30) Ein Taglöhner erhält für 30 Tage Arbeit als Lohn 1 fl. und 2 Malter Frucht; von einem Anderen, dem er um gleichen Taglohn arbeitete, erhielt er für 24 Tage 1 Malter Frucht und 5 fl. Geld. Wenn nun in beiden Fällen der Werth der Frucht derselbe ist, wie groß ist der Preis eines Malters?

31) Die Zahl 80 soll in 2 Theile getheilt werden, welche sich verhalten wie 13 : 7, wie heißen diese?

32) Ein Kaufmann hat 2 Sorten Kaffee, zusammen 190 ℔. Wenn er nun von der ersten die Hälfte und von der zweiten den 4ten Theil verkauft, so verhält sich der von der ersten übrig bleibende Rest zu dem von der zweiten Sorte wie 3 : 5; wie viel hat er von jeder Sorte?

33) 800 fl. sollen in solcher Weise unter drei Personen **A**, **B** und **C** vertheilt werden, daß **A** eben so oft 3 fl. erhält als **B** 5 fl. bekommt, und **C** soll 20 fl. mehr erhalten als **B**; wie viel erhält jeder?

34) Eine Summe **s** soll in 3 Theile getheilt werden, welche sich verhalten wie **a : b : c**, wie groß werden die 3 Theile?

35) Drei Größen sind zusammen genommen = **a**, die erste ist um **b** größer als das **n**fache der 2ten, die 3te verhält sich zur 2ten wie **n : 1**, wie heißen die 3 Größen?

36) Ein Kaufmann verkauft zweierlei Waaren; von der ersten, von welcher das Pfund 30 kr. kostet, verkauft er 20 ℔ mehr als von der 2ten, von welcher 1 ℔ nur 16 kr. kostet; er löst im Ganzen 71 fl. 20 kr., wie viel hat er von jeder Waare verkauft?

37) Es hat Jemand eine Summe von 103 fl. in Kronenthalern und preussischen Thalern, zusammen 48 Stücke; wie viele Stücke hat er von jeder Geldsorte?

38) Ein Gehülfe und ein Lehrling erhalten zusammen täglich 1 fl. 24 kr. Lohn; wenn nun der erste 30 und der 2te 25 Tage arbeitete und der Lohn im Ganzen 39 fl. 30 kr. beträgt; wie viel Lohn hat jeder täglich?

39) Ein Weinhändler mischt eine bestimmte Quantität Wein, von welchem der Schoppen 10 kr. kostet, mit 20 Maaß Wasser, damit er den Schoppen zu 8 kr. geben kann; wie viel Wein ist in der Mischung?

40) 1 Centner Tabak, wovon das Pfund 48 kr. kostet, soll mit einer anderen Sorte zu 24 kr. so gemengt werden, daß eine Sorte zu 40 kr. entsteht; wie viele Pfund von der zweiten muß er dazu nehmen?

41) Eine Composition aus Zinn und Blei wiegt 24 ℔ und besteht aus 2 Theilen Zinn und 1 Theil Blei; wie viel Zinn muß noch zugesetzt werden, damit auf 7 Theile Zinn 2 Theile Blei kommen; oder wie viel Blei müßte ausgeschieden werden, damit dieses Verhältniß hergestellt wird.

42) Eine Mischung von 2 Stoffen enthält **a** ℔ vom ersten und **b** ℔ vom 2ten Stoffe; wie viel muß dem ersten noch zugesetzt werden, daß das Mischungsverhältniß = **c : d** wird?

43) Das Verhältniß **c : d** soll aber nun ferner durch Wegnehmen einer Quantität des 2ten Stoffes erreicht werden; wie viel muß man dann wegnehmen?

44) Wenn nun aber das ursprüngliche Gewicht nicht geändert werden darf; wie viel muß man vom 2ten Stoffe wegnehmen und vom ersten zusetzen?

45) Löset die Aufgabe 41 mit Hülfe der allgemeinen Resultate von 42 und 43!

46) 5 Mark 13löthiges Silber soll durch Kupferzusatz in 10löthiges Silber verwandelt werden, wie viel Kupfer muß zugesetzt werden?

47) Ein Capital wurde zu 4 Procent ausgeliehen, und betrug am Ende des Jahres sammt Zinsen 8320 fl.; wie groß war es anfangs?

48) Welches Capital muß man ausleihen, um am Ende des 4ten Jahres bei einfachen Zinsen zu 5 Procent 1200 fl. Capital und Zins zu besitzen?

49) **A** schuldet dem **B** seit mehreren Jahren 500 fl.; nun fordert **B** 567 fl. 30 kr. Capital und einfache Zinsen zusammen, wobei er $4\frac{1}{2}$ Procent rechnete. Wie lange ist **A** dem **B** die 500 fl. schuldig?

50) Es leiht Jemand bei einem Wucherer 20 fl. und stellt dafür einen Schuldschein aus, in welchem er in 6 Wochen 24 fl. zu bezahlen verspricht; wie viele Procente hat er versprochen?

51) Ein Capitalist hat seine Gelder zu verschiedenen Procenten ausgeliehen, den einen Theil zu 5 % und eine um 5000 fl. größere Summe zu 4 %; wenn er nun im Ganzen jährlich 1460 fl. Zins bezieht, wie groß sind die beiden Capitalien?

52) **A** leiht dem **B** 600 fl. und dem **C** 1000 fl.; **B** muß das Capital zu $\frac{1}{2}$ % höher verzinsen als **C**. Wenn nun **A** jährlich 75 fl. Zins erhält von **B** und **C** zusammen; zu wie viel Procenten sind die Gelder ausgeliehen?

53) Zwei Meister **A** und **B** übernehmen gemeinschaftlich eine Arbeit, wofür sie 900 fl. erhalten; **A** stellt dazu 25 Arbeiter 24 Tage lang und **B** gibt 15 Tage lang 35 Arbeiter; wie viel hat **A** und **B** von den 900 fl. zu erhalten?

54) Zwei Kaufleute machen gemeinschaftlich eine Unternehmung, **A** gibt dazu 1000 fl. auf 10 Monate und **B** 900 fl. auf 7 Monate her; wenn nun **A** vom Gewinn 600 fl. erhält, wie viel beträgt dieser?

Löset diese Aufgabe auch ohne Gleichung!

55) Ein Wasserbehälter kann durch 2 Röhren gefüllt werden; die eine liefert in jeder Minute 4 Cubikfuß, und die andere 5 Cubikfuß Wasser. Die zweite wird nun später geöffnet als die erste und nach 50 Minuten ist das Behälter, welches 300 Cubikfuß fassen kann, gefüllt; um wie viel Zeit wurde die 2te Röhre später geöffnet?

Löset diese Aufgabe auch ohne Gleichung!

56) Wenn aber die erste Röhre 3 Minuten später geöffnet wird als die 2te, nach wie viel Minuten (von der Oeffnung der 2ten an gerechnet) wird dasselbe Behälter zur Hälfte voll sein?

Durch eine Gleichung und auch ohne eine Gleichung zu rechnen!

57) Ein Körper bewegt sich von einem Orte **A** gegen einen anderen Ort **B**, welcher 1750 Fuß entfernt ist, mit einer Geschwindigkeit von 3 Fuß in der Secunde; ein anderer bewegt sich von **B** gegen **A**, fängt 10 Secunden später an sich zu bewegen als der von **A** abgegangene, und legt in jeder Secunde 5 Fuß zurück. Wann und wo treffen sie einander?

58) Ein Dampfwagen legt auf einer Eisenbahn in jeder Secunde 30 Fuß zurück; 10 Minuten später geht ein anderer auf derselben Bahn vom nämlichen Orte aus ab; wie viel Fuß muß dieser in jeder Secunde zurücklegen, wenn er eine Minute nach dem ersten in einem um 6 Stunden entfernten Bahnhofe eintreffen soll, und wenn eine Wegstunde = 14814 Fuß angenommen wird?

59) In welchem Moment zwischen 8 und 9 Uhr stehen der Stunden- und der Minutenzeiger einer jeden Uhr genau übereinander?

60) Ein Eilbote wird mit einer Nachricht nach einem um 250 Stunden entfernten Orte **N** geschickt; er reist täglich 10 Stunden lang und legt in jeder Stunde 2 Wegstunden zurück. Vier Tage später wird ihm ein anderer nachgeschickt, um die Nachricht zu widerrufen; dieser ruht täglich 8 Stunden aus und legt in jeder Stunde $2\frac{1}{2}$ Stunden zurück; am wievielten Tage und wo wird er den ersten einholen?

61) In einem Bergwerke stehen zwei Dampfmaschinen, welche zur Förderung des Grubenwassers dienen; die erste pumpt in jeder Minute 3 Ohm Wasser aus der Grube, die zweite 4 Ohm. Wenn nun die 2te 10 Minuten später in Wirksamkeit tritt als die erste; wie lange muß sie noch wirken, wenn von beiden zusammen 45 Fuder (450 Ohm) Wasser zu fördern sind und wie viel Wasser hat jede Maschine aus der Grube geschafft?

62) Ein leerer Mühlenteich kann durch die Oeffnung zweier Schleusen gefüllt werden, und zwar durch die erste in 20 Stunden und durch die 2te in 15 Stunden. Wenn man nun beide Schleusen zugleich öffnet, in welcher Zeit wird der Teich voll?

63) Ein Stück Wald soll ausgerottet und urbar gemacht werden; zu dieser Arbeit melden sich eine Anzahl Taglöhner, welche in 40 Tagen damit fertig werden können; eine andere Abtheilung Taglöhner will in 35 Tagen die Arbeit zu Stande bringen. Wenn man nun beiden zusammen die Urbarmachung überläßt; wie lange brauchen sie?

64) Ein Arbeiter kann eine bestimmte Arbeit in **a** Tagen zu Stande bringen, ein anderer braucht **b** Tage und ein dritter kann die Arbeit in **c** Tagen vollenden; wie lange brauchen alle 3 zusammen, wenn sie zugleich arbeiten?

65) Ein Gutsbesitzer hat eine Wiese, welche von 30 Pferden in 3 Wochen abgeweidet werden kann; schickt er aber 40 Ochsen und Kühe auf dieselbe, so fressen diese in 14 Tagen alles Gras ab. Wenn man nun auf das nachwachsende Gras keine Rücksicht nimmt; in wie viel Tagen werden diese 70 Thiere zusammen die Wiese abweiden?

66) Ein Händler findet, daß er an einer Waare 60 fl. gewinnt, wenn er das Pfund zu 25 kr. abgibt; fordert er aber nur 18 kr. für das Pfund, so verliert er 24 fl. daran. Wenn er nun 12 fl. an der Waare gewinnen will, wie theuer muß er das Pfund verkaufen?

67) Eine Gesellschaft hat eine Zahlung zu leisten, und zwar jede Person einen gleichen Theil. Zahlt nun jede 3 fl. 30 kr., so fehlen noch 6 fl.; gibt aber jede 4 fl., so kommen 4 fl. mehr zusammen als nöthig sind; wie viele Mitglieder zählt die Gesellschaft, und was haben sie im Ganzen und einzeln zu bezahlen?

68) Ein Taglöhner arbeitet bei einem Holzhändler für 1 Klafter Holz und 13 fl. baares Geld 50 Tage lang; als diese verflossen waren bietet ihm der Holzhändler eine tägliche Lohnerhöhung von 3 kr. an, wenn er noch 3 Wochen (18 Tage) bei ihm arbeiten wolle, er erhielte dann noch $\frac{1}{2}$ Klafter Holz und 2 fl. 30 kr. Lohn. Wie hoch wurde das Holz gerechnet, und wie groß ist der Taglohn in beiden Fällen?

69) **A** ist dem **B** eine gewisse Summe schuldig, er bezahlt nun 32 fl. mehr als den dritten Theil der Schuld; nach einiger Zeit gibt er dem **B** noch 20 Kronenthaler; nach einigen Tagen leiht er aber von **B** wieder 30 fl. und verspricht nun die noch restirende Schuldsumme und die 30 fl. mit 4 Procent zu verzinsen. Nach 3 Jahren tilgt **A** seine Schuld sammt Zinsen durch eine Zahlung von 64 preussischen Thalern; wie viel war er anfangs dem **B** schuldig?

70) Von einer zu suchenden Zahl wurde zuerst 15 abgezogen, dann der Rest durch 173 getheilt, zum Quotienten 278 addirt und nun diese ganze Summe von der gesuchten Zahl abgezogen; da blieb ein Rest, welcher um $9\frac{1}{4}$ kleiner ist als der vierte Theil der gesuchten Zahl; wie heißt diese?

71) Die Seite eines Quadrats ist um 5 größer als die eines anderen und die Inhalte beider differiren um 225, wie groß sind die Seiten und die Inhalte beider?

72) Ein quadratförmiges Stück Feld soll mit Bäumen besetzt werden. Würden diese so gesetzt, daß auf 16 Quadratfuß 1 Baum kommt, so brauchte man 245 Bäume mehr als auf das Feld gesetzt werden sollen; würden aber die vorhandenen Bäume in derselben Weise gesetzt, so reichen sie nur zu einem quadratförmigen Stück, welches in jeder Seite um 28 Fuß kürzer ist als das Feld. Wie viele Bäume sind vorräthig, wie groß ist das Feld und wie müssen die Bäume auf dasselbe gesetzt werden?

73) Man soll das Quadrat einer Zahl finden, welches die Eigenschaft hat, daß wenn man von ihm einzeln die Quadrate zweier andern Zahlen **a** und **b** abzieht, die Quadratwurzeln dieser Differenzen um eine 3te Zahl **c** differiren.

74) Von welcher Zahl muß man einzeln die Quadrate der Zahlen 3 und 4 abziehen; wenn die Quadratwurzel aus dem ersten Rest um 1 größer sein soll, als die aus dem 2ten Rest?

75) Eine Zahl wird mit 2 Ziffern geschrieben, von denen die 2te um 2 kleiner ist als die erste; setzt man die 2te Ziffer vor die erste, so entsteht eine Zahl, welche um 18 kleiner ist als die anfängliche, wie heißt diese?

76) Von einer dreizifferigen Zahl sind die erste und 2te Ziffer gleich groß, die 3te ist um 3 kleiner als jede der 2 anderen. Wenn man die Ziffern in umgekehrter Ordnung schreibt, so entsteht eine Zahl, deren Quadratwurzel um 9 kleiner ist als die Quadratwurzel aus der ersten Zahl; wie heißt diese?

77) Welche Zahl muß man von den 2 Zahlen 500 und 725 abziehen, damit die Quadratwurzeln aus den Resten sich wie 4 : 5 verhalten?

78) Zu welcher Zahl muß man einzeln die Zahlen 2, 21, 58 und 210 addiren, damit die Cubikwurzeln aus den hierdurch entstehenden Zahlen der Reihe nach eine geometrische Proportion bilden; wie heißt ferner diese Proportion?

C. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§. 1. Gleichungen mit 2 Unbekannten.

a) Wenn eine Gleichung mit 2 unbekannten Größen gegeben ist, z. B. $5x + 2y = 15,$

so läßt sich die eine in der anderen und in den bekannten Größen ausdrücken, es ist hier z. B.

$$x = \frac{15 - 2y}{5} = 3 - \frac{2y}{5}.$$

Da nun aber y selbst unbekannt ist, so ist auch x nicht bestimmt; und man weiß nur, daß x gefunden werden kann, wenn man zwei Fünftheile einer anderen Größe von 3 abzieht.

Man nennt eine solche Gleichung eine unbestimmte oder diophantische (weil Diophant sie zuerst anwendete, um Rechenräthsel aufzulösen).

Man kann also aus einer Gleichung keine zwei Unbekannten finden.

Wenn aber noch eine 2te Gleichung gegeben ist, in welcher x und y dieselben Größen bedeuten wie in der ersten Gleichung (und welche aus der ersten nicht gebildet werden kann), dann lassen sich beide Unbekannte finden. Z. B. es sei noch:

$$13x - 3y = -2, \text{ so ist wieder } x = \frac{3y - 2}{13}.$$

Da nun aber x in beiden Gleichungen denselben Werth haben soll, so muß auch:

$$3 - \frac{2y}{5} = \frac{3y - 2}{13}$$ sein, woraus man nun $y = 5$ erhält

und x ist dann $= 3 - \frac{2 \cdot 5}{5} = 1$

oder x ist $= \frac{3 \cdot 5 - 2}{13} = 1.$

Wenn also 2 Gleichungen gegeben sind, so können auch 2 unbekannte Größen gefunden werden.

b) Aus dem Vorhergehenden ergibt sich zugleich ein allgemeines Verfahren für die Auffindung der beiden Unbekannten:

Man suche die eine Unbekannte aus beiden Gleichungen und setze die 2 Werthe einander gleich, so erhält man eine Gleichung, welche nur eine Unbekannte enthält.

Man nennt dieses Verfahren die Gleichsetzung oder Comparation.

c) Ein zweites Verfahren ist die Substitution; man sucht aus der einen Gleichung den Werth der einen Unbekannten und setzt (substituirt) diesen an die Stelle der nämlichen Unbekannten in der anderen Gleichung. Es sei z. B.

$$\text{I.}\quad 5x + 4y = 23.$$
$$\text{II.}\quad 4x - 3y = 6.$$

Aus I. ist: $y = \frac{23 - 5x}{4}$, diesen Werth statt y in

II. gesetzt gibt: $4x - 3 \cdot \frac{23 - 5x}{4} = 6$,

woraus $x = 3$; daher ist $y = \frac{23 - 5 \cdot 3}{4} = 2.$

Dieses Verfahren beruht darauf, daß y in **I.** und **II.** dieselbe Größe bedeutet; ebenso hätte man auch x aus **I.** oder **II.** suchen und in **II.** oder **I.** setzen können.

Suchet x und y auf diese 2 Arten!

d) Eine 3te Methode, welche in den meisten Fällen kürzer ist als die zwei vorhergehenden, besteht darin, daß man die Coefficienten der einen Unbekannten (durch Multiplication) gleich macht und dann die 2 Gleichungen addirt oder subtrahirt, je nachdem die 2 Glieder, in denen die Unbekannte erscheint, entgegengesetzte oder gleiche Zeichen haben. Z. B. es sei:

$$\text{I.}\quad 4x - 7y = 26$$
$$\text{II.}\quad 3x + 2y = 34.$$

Man mache z. B. die Coefficienten von y einander gleich, beide sind in 14 enthalten, man multiplicire nun die erste Gleichung mit 2 und die zweite mit 7, so folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. 2)} & 8x - 14y = 52 \\ \text{II. 7)} & 21x + 14y = 238 \end{array}\right\} \text{ addirt:}$$
$$29x \quad = 290, \text{ also } x = 10.$$

Diesen Werth in I. gesetzt gibt: $40 - 7y = 26, \quad y = 2$

oder in II. " " $30 + 2y = 34, \quad y = 2.$

e) Alle drei Methoden haben daher den Zweck, die eine Unbekannte auszuscheiden (zu eliminiren).

Nach der 3ten Methode ist die Auflösung in manchen Fällen noch auf kürzere Weise ausführbar; nämlich wenn entweder die eine Unbekannte in beiden Gleichungen schon gleiche Coefficienten hat, oder wenn der eine ein Vielfaches des anderen ist und endlich auch dann, wenn beide gleiche Faktoren enthalten. Z. B.

$$1)\quad \left.\begin{array}{ll} \text{I.} & 2x - 5y = 75 \\ \text{II.} & 51x - 5y = 2525 \end{array}\right\} \text{ subtrahirt:}$$

$$\text{I.} - \text{II.} \quad -49x = -2450, \text{ oder } 49x = 2450, \ x = 50 \text{ u. s. w.}$$

$$2)\quad \begin{array}{ll} \text{I.} & ax + by = a \\ \text{II.} & cx - bdy = d \\ \text{I. } d) & adx + bdy = ad \end{array} \Bigg\} \text{ addirt:}$$

$$\text{II.} + \text{I. } d)\quad adx + cx = ad + d, \qquad x(ad + c) = d(a + 1)$$

folglich $x = \frac{d(a+1)}{ad+c}$, hieraus nun y u. s. w.

$$3)\quad \begin{array}{ll} \text{I.} & 13x - 24y = 1276 \\ \text{II.} & 9x - 16y = 884 \end{array}$$

Um die Coefficienten von y gleich zu machen, multiplicire man

I. mit 2 und II. mit 3, denn $24 = 3 \cdot 8$ und $16 = 2 \cdot 8$, beide haben also den gleichen Faktor 8. Oder sowohl 24 als 16 ist in 48 enthalten, daher:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. 2)} & 26x - 48y = 2552 \\ \text{II. 3)} & 27x - 48y = 2652 \end{array}\right\} \text{subtrahirt:}$$

$$-x \quad = -100, \quad x = 100 \text{ u. s. w.}$$

f) Jede Gleichung mit 2 Unbekannten muß vor der Elimination der einen Unbekannten auf die Form $ax + by = c$ gebracht werden, was auf gleiche Weise geschieht wie bei den Gleichungen des ersten Grades. Z. B.

$$(a + x) \cdot (b - y) + \frac{y^2}{4} = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - x^2.$$

$$ab + bx - ay - xy + \frac{y^2}{4} = x^2 - xy + \frac{y^2}{4} - x^2.$$

$$-x^2 + x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} + bx - xy + xy - ay = -ab.$$

Oder reducirt: $bx - ay = -ab$.

§. 2. Auflösungen einiger Gleichungen mit 2 Unbekannten.

1) $\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & 5x - 36y = -11 \\ \text{II.} & x + 3y = 8 \end{array}\right\}$ 1te Methode.

Aus I $x = \frac{36y - 11}{5}$, aus II. $x = 8 - 3y$,

daher: $\frac{36y - 11}{5} = 8 - 3y$, hieraus $y = 1$.

Diesen Werth in den von x gesetzt, gibt $x = 8 - 3 = 5$.

2) $\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & 8x + 360y = -121 \\ \text{II.} & 9\frac{1}{2}x - 50y = 1 \end{array}\right\}$ 2te Methode.

Aus I. $x = -\frac{121}{8} - 45y$ in II. gesetzt, gibt:

$$\frac{19}{2}\left(-\frac{121}{8} - 45y\right) - 50y = 1, \text{ hieraus } y = -\frac{463}{1528}.$$

Diesen Werth in den Ausdruck für x gesetzt, gibt:

$$x = -\frac{121}{8} + 45 \cdot \frac{463}{1528}, \text{ woraus } x = -\frac{569}{382}.$$

3) $\begin{array}{ll} \text{I.} & ax + by = c \\ \text{II.} & dx + fy = g \end{array}$ } 3te Methode.

$\begin{array}{ll} \text{I.}\,f) & afx + bfy = cf \\ \text{II.}\,b) & bdx + bfy = bg \end{array}$ } subtrahirt:

$$afx - bdx = cf - bg, \text{ also } x = \frac{cf - bg}{af - bd} \text{ und}$$

in I. gesetzt: $by = c - ax = c - \frac{acf - abg}{af - bd}$, $y = \frac{ag - cd}{af - bd}$.

In diesen 2 Resultaten sind zugleich die Antworten für alle möglichen Gleichungen mit 2 Unbekannten enthalten, da die 2 Gleichungen ganz allgemein sind. Z. B. in Aufg. 1 ist $a = 5$, $b = -36$, $c = -11$, $d = 1$, $f = 3$ und $g = 8$, daher

$$x = \frac{-11 \cdot 3 - (-36 \cdot 8)}{5 \cdot 3 - (-36 \cdot 1)} = \frac{-33 + 288}{15 + 36} = \frac{255}{51} = 5,$$

und $y = \frac{5 \cdot 8 - (-11 \cdot 1)}{5 \cdot 3 - (-36 \cdot 1)} = \frac{40 + 11}{15 + 36} = \frac{51}{51} = 1$; wie früher.

4) $2x + 37y = 1556$

$9x - 5y + 3x = 5(x - y) + 70.$

Die 2te geordnet, so folgt $7x = 70$, also $x = 10$.

In I. gesetzt gibt $37y = 1556 - 20$, $y = 41\frac{19}{37}$.

5) $\begin{array}{l} 5x - 2y(3 - 3x) = 6xy - 1 \\ 8y - 10 = 3x + 20 - 12y \end{array}$ } geordnet, so folgt:

$\begin{array}{ll} \text{I.} & 5x - 6y = -1 \\ \text{II.} & -3x + 20y = 30 \end{array}$ } 3te Methode angewendet!

$\begin{array}{ll} \text{I. } 3) & 15x - 18y = -3 \\ \text{II. } 5) & -15x + 100y = 150 \end{array}$ } addirt.

$$82y = 147, \; y = \frac{147}{82} \text{ u. s. w. } x = \frac{80}{41}.$$

6) $\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 2 \\ \text{II.} & \frac{7}{x} + \frac{10}{y} = 4\frac{1}{3} \end{array}$ } 3te Methode.

I. 2) $\frac{6}{x} + \frac{10}{y} = 4$, von II. abgezogen, so bleibt:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \text{ folglich } x = 3,$$

in I. gesetzt, gibt $1 + \frac{5}{y} = 2$, daher $y = 5$.

Wenn man diese Gleichungen ordnen würde, so erhielte man:

$$3y + 5x = 2xy, \text{ und } 21y + 30x = 13xy,$$

oder: $5x + 3y - 2xy = 0$ und $30x + 21y - 13xy = 0$.

Aus der ersten ist $x = -\frac{3y}{5 - 2y}$ in die 2te gesetzt, gibt:

$$-\frac{90y}{5 - 2y} + 21y + \frac{39y^2}{5 - 2y} = 0, \text{ mit } 3y \text{ gehoben, so folgt:}$$

$$-30 + 7(5 - 2y) + 13y = 0, \text{ woraus wieder } y = 5.$$

Diese Auflösung ist viel weitläufiger!

7) $\frac{ax}{a+b} = \frac{by}{a-b}$, oder geordnet, gibt:

I. $a(a - b)x - b(a + b)y = 0$.

II. $x + y = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$.

Suchet aus II den Werth von y, so folgt: $y = \frac{b^2 + a^2}{ab} - x$,

in I. gesetzt, gibt: $a(a - b)x - b(a + b)\left[\frac{b^2 + a^2}{ab} - x\right] = 0$.

$$a(a - b)x - b(a + b) \cdot \frac{a^2 + b^2 - abx}{ab} = 0.$$

Löset nun diese Gleichung auf, so folgt:

$$a^2(a - b)x - (a + b)(a^2 + b^2 - abx) = 0,$$

$$x[a^2(a - b) + ab(a + b)] = (a + b)(a^2 + b^2).$$

Hieraus durch Reduction:

$$x = \frac{(a + b)(a^2 + b^2)}{a^3 + ab^2} = \frac{(a + b)(a^2 + b^2)}{a(a^2 + b^2)} = \frac{a + b}{a},$$

folglich $y = \frac{a^2 + b^2}{ab} - \frac{a + b}{a} = \frac{a^2 + b^2 - ab - b^2}{ab} =$

$$y = \frac{a^2 - ab}{ab} = \frac{a - b}{b}.$$

Anmerkungen.

1) Um die Resultate zu prüfen, setze man x und y in die eine oder andere Gleichung, so muß eine identische Gleichung entstehen, z. B. in der letzten Aufgabe, setze x und y in II., so folgt:

$$\frac{a + b}{a} + \frac{a - b}{b}, \text{ oder } \frac{ab + b^2 + a^2 - ab}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

und die andere Seite der Gleichung ist $= \frac{b^2 + a^2}{ab}$;

also sind beide Seiten gleich und die Resultate sind richtig.

2) Es seien die 2 Gleichungen $\left\{\begin{array}{l} \text{I. } 3x + y = 10 \\ \text{II. } 15x + 5y = 50 \end{array}\right\}$ gegeben.

Aus I ist $y = 10 - 3x$, in II. gesetzt, gibt:

$$15x + 5(10 - 3x) = 50, \text{ oder } 50 = 50,$$

eine identische Gleichung.

Dies rührt daher, weil die IIte Gleichung keine anderen Angaben enthält als die erste, sie ist aus der ersten entstanden; denn I . 5 gibt Gleichung II., es ist also eigentlich nur eine Gleichung gegeben, und daher ist die Aufgabe nicht lösbar.

3) Es ist nicht gleichgültig, welche von den 3 Eliminationsmethoden man anwendet, das Resultat wird allerdings dasselbe; aber die Rechnung wird bei der Anwendung der einen gewöhnlich kürzer als bei den beiden anderen.

Die erste Methode führt nur selten auf kurze Rechnungen, da die zwei Werthe für die Unbekannte meistens Bruchform erhalten; man bedient sich gewöhnlich der 2ten oder 3ten Methode.

§. 3. Aufgaben über Gleichungen vom ersten Grade mit 2 Unbekannten.

Suchet die Werthe von x und y aus folgenden Gleichungen:

1) $\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x - y = 12 \end{array}\right\}$ auf alle 3 Arten.

2) $\left.\begin{array}{l} 5x + 2y = 102 \\ 3x + 2y = 62 \end{array}\right\}$ nach der 3ten Art.

3) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 1 \\ x - 5y = -4 \end{array}\right\}$ nach der 2ten Art.

4) $\left.\begin{array}{l} 2x - 10y + 13 = 0 \\ 9x - 8y = 7x + 31 \end{array}\right\}$ nach der ersten Art.

5) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3y - \frac{1}{2} = 37 + 2y \\ 85 + 5y + x = -5y + 10x \end{array}\right\}$ 3te Art.

6) $\left.\begin{array}{l} x + 17 - y = 3x + 9 - y \\ 2y + 8 = 5x - 6 \end{array}\right\}$ 2te Art.

7) $(10 + x)5 - 3(y - 2) = 55$
$(8 - x)3 + (5 - y)2 = 27.$

8) $0{,}7x = 0{,}9y$
$3x - 4y + 15 = 0{,}6y + 9{,}8.$

Prüfet die Resultate in allen 8 Aufgaben!

9) $\left.\begin{array}{l} ax + by = a \\ bx + ay = b \end{array}\right\}$ auf 3 Arten!

10) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = \frac{1}{12}$, $3x + y = 4$ — 3te Art. Prüfet die Werthe!

11) $x + 2y = 30$, $\frac{2x}{9} + \frac{7y}{9} = 10$ — auf 3 Arten.

12) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 3\frac{1}{2}$, $\frac{7x}{20} + \frac{3y}{4} = 2\frac{11}{20}$ — 3te Art, ohne die Nenner zuerst wegzubringen!

13) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$, $cx + y = ac + b$

14) $\frac{ax}{b} + \frac{cy}{d} = m$, $\frac{ax}{f} - \frac{by}{g} = m$ — 3te Art, nachdem die Nenner beseitigt sind.

15) I.) $\frac{x+7}{2y-6} = 1$ und II.) $\frac{9x-2y}{22} = \frac{1}{2}$.

16) I.) $\frac{x+y^2}{0,7+y} = y + 0,79$ und II.) $\frac{x}{y} = 3\frac{1}{3}$, auf die 2te Art!

17) $3\frac{1}{3}x - 9\frac{2}{3} - 15\frac{7}{9}y = -21\frac{5}{6}$, $\frac{1270,6}{3} - \frac{88}{15}x + \frac{86}{3}y = \frac{1000}{3} + 117$.

18) I.) $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = c$, und II.) $\frac{d}{x} - \frac{f}{y} = g$, (3te Art, siehe §. 2. Nro. 6.)

19) $\left(x + \frac{y}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{y}{2}\right) = 2x + x^2 - \frac{y^2}{4} - 5y$, $(3x + 2) \cdot (x - 3) = 3x(x - 4) + 9y + 1$.

20) I.) $\frac{2}{x+y} = \frac{3}{2x+y}$, und II.) $\frac{0,9x^2}{y-1,1} = 2x$.

21) I.) $\frac{a+y}{x} + \frac{y}{b} = \frac{2y+c}{2b}$, und II.) $\frac{y}{2x-a} = \frac{c}{2b} - 1$.

22) Suchet x und y aus folgenden zwei Proportionen mit Hülfe der Gleichungen:

I.) $x : y + 2 = 500 : 51$, und II.) $3x + 7 : 60y + 14 = 1 : 2$.

23) Ebenso aus: I.) $x + y : x - y = 3 : 1$, und

II.) $x^2 - y^2 : x - y = 6 : 1$.

24) $$\begin{cases} \frac{4x}{3} + \frac{3y}{2} + 8x = -9y + x - 0{,}75 \\ \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2\frac{1}{2}x - \frac{15}{8} = \frac{9y}{4} + 1{,}5 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2. \end{cases}$$

25) $$\begin{cases} x - \frac{8y}{x} = \frac{(x+5)^2}{x} - 12{,}6 \\ \left(x + \frac{10}{3}\right) \cdot (7 - y) = \left(y + 1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(72\frac{6}{7} - x\right). \end{cases}$$

26) $$\begin{cases} \frac{a + x}{a - b} - \frac{ax + by}{a^2 - b^2} = \frac{y - x}{a + b} \\ \frac{x - a}{2a} + 2 = \frac{y - x}{a + b}. \end{cases}$$

27) I.) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{1}{5}$, und II.) $x - y = -5$.

28) I.) $20\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 205$, und II.) $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 32$.

29) $$\begin{cases} \sqrt{(4x^2 + 4xy + y^2 + x)} = 2x + y - 3 \\ \sqrt{(x^2 - 6xy + 9y^2 + y + 1)} = x - 3y - 4. \end{cases}$$

30) $$\begin{cases} 4\sqrt[3]{(x + y)} = 5\sqrt[3]{(x^2 - y^2)} \\ \sqrt{(x^2 - 2\frac{3}{61}y)} = x - 1. \end{cases}$$

§. 4. Anwendung auf die Lösung von Aufgaben.

Wenn in einer Rechnungsfrage 2 unbekannte Größen vorkommen, so kann dieselbe dadurch gelöst werden, daß man auf ähnliche Weise, wie in B. §. 5. und §. 6. gezeigt wurde, aus den Angaben 2 Gleichungen ansetzt, welche die 2 Unbekannten enthalten, und diese 2 Gleichungen werden dann aufgelöst.

Aufgaben.

1) Es sollen 2 Zahlen aus folgenden Angaben gefunden werden: Die 6fache erste und die 5fache 2te sind zusammengenommen = 49; wird aber die erste doppelt genommen, so ist sie um 3 größer als die 2te.

Auflösung. Die erste Zahl sei x, die 2te y, so muß

I.) $6x + 5y = 49$ und II.) $2x = y + 3$ sein.

Werden diese 2 Gleichungen nun aufgelöst, so findet man, daß die erste Zahl $= 4$ und die 2te $= 5$ ist.

Suchet diese Werthe!

2) A sagt zu B: Wenn ich dir 10 fl. gebe, so haben wir gleich viel Geld, denn ich habe jetzt um ein Drittheil mehr als Du; wie viel hat jeder?

Auflösung. A habe x und B y Gulden, so behält A noch $x - 10$, wenn er dem B 10 fl. gibt, und B hat dann $y + 10$ fl., daher:

$$\text{I.)}\ x - 10 = y + 10, \qquad \text{II.)}\ x = y + \frac{y}{3}.$$

Hieraus findet man $x = 80$ und $y = 60$ Gulden.

3) Es sei eine zweizifferige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat: Die 4fache erste Ziffer ist um 2 größer als die 6fache zweite, kehrt man aber die Zahl um (d. h. schreibt man die Ziffern in umgekehrter Ordnung), so ist die dadurch entstehende Zahl um 18 kleiner als die gesuchte.

Auflösung. Die erste Ziffer sei $= x$, die 2te $= y$, so ist: I.) $4x = 6y + 2$; und da in einem Falle x, und bei der Umkehrung y die Zehner bedeuten, so ist: II.) $10x + y = 10y + x + 18$.

Suchet aus I. und II. x und y, so findet ihr die Zahl 53.

4) Die Geometrie lehrt, daß der Inhalt eines Rechtecks = dem Produkte aus der Länge und Breite ist. Nun hat ein Landwirth 2 Aecker, welche rechteckig sind, der eine ist 10 Fuß länger als der andere, und 15 Fuß breiter, und hat deshalb 1950 Quadratfuß mehr Inhalt als der andere. Die Länge und Breite des 2ten betragen zusammen 130 Fuß, wie lang und wie breit sind die zwei Aecker?

Auflösung. Der 2te sei x Fuß lang und y Fuß breit, so ist sein Inhalt $= x \cdot y$, der erste ist $x + 10$ Fuß lang und $y + 15$ Fuß breit, daher der Inhalt des ersten $= (x + 10)(y + 15)$. Hieraus die 2 Gleichungen:

$$\text{I.)}\ (x + 10)(y + 15) = xy + 1950, \text{ und:}$$

$$\text{II.)}\ x + y = 130.$$

Man findet $x = 100$ und $y = 30$, daher ist der 2te Acker 100 Fuß lang und 30 Fuß breit und der erste 110 lang und 45 breit.

5) Das Silber ist $10\frac{1}{2}$ mal schwerer als das Wasser (oder das specifische Gewicht des Silber ist = 10,5), und das Kupfer ist 8,9 mal schwerer als Wasser.

Wenn nun ein Gefäß, welches 8 Pfunde wiegt, aus einer Mischung dieser zwei Metalle besteht und ein specifisches Gewicht = 10 hat; wie viel Silber und Kupfer enthält dieses?

Auflösung. Es seien x ℔ Silber und y ℔ Kupfer in der Metallmischung, so wird ein Wasserkörper, welcher denselben Raum einnimmt wie das Silber = $\frac{x}{10,5}$ ℔ wiegen; ebenso wird der Wasserkörper, welcher den gleichen Raum einnehmen würde wie das Kupfer, $\frac{8}{8,9}$ ℔ wiegen; das Wasser aber, welches mit der Masse des Gefäßes gleichen Raum hat, wiegt $\frac{8}{10}$.

Da nun dieses Gewicht = der Summe der aus den 2 Bestandtheilen gefundenen Gewichte sein muß; so ist:

$$\text{I.)}\ \frac{x}{10,5} + \frac{y}{8,9} = \frac{8}{10};\ \text{und II.)}\ x + y = 8.$$

Hieraus findet man nun, daß 5 ℔ $24\frac{4}{5}$ Loth Silber und 2 ℔ $7\frac{1}{5}$ Loth Kupfer in der Mischung sind.

6) Ein Kaufmann berechnet, daß er aus einer bestimmten Quantität Zucker und Kaffee 87 fl. lösen würde, wenn er das ℔ Zucker zu 21 und das ℔ Kaffee zu 26 kr. verkauft; verlangt er aber für den Zucker 22 kr. und für den Kaffee 28 kr., so löst er 92 fl. 40 kr. Was wiegt jede Sorte?

Auflösung. Es seien x ℔ Zucker und y ℔ Kaffee, so kosten diese:

im ersten Falle $21x + 26y = 5220$ Kreuzer (I.)

" 2ten " $22x + 28y = 5560$ " (II.)

Hieraus $x = 100$ ℔ (Zucker), und $y = 120$ ℔ (Kaffee).

Suchet selbst diese Resultate! (Ziehet z. B. zuerst die erste Gleichung von der 2ten ab, so wird eine einfachere Gleichung entstehen.)

7) Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Wenn man die erste 6 Minuten und die zweite $5\frac{1}{2}$ Minuten öffnet, so erhält man eine Wassermasse von 4 Ohm 9 Maaß (409 Maaß); und um das ganze Behälter zu füllen, welches 635 Maaß hält, müßte z. B. die erste Röhre 10 Minuten und zugleich auch die 2te 8 Minuten lang geöffnet sein. Wie viele Maaß Wasser liefert jede Röhre in der Minute; wie lange braucht jede allein, wenn durch sie das Behälter gefüllt werden soll, und wie lange müssen beide zusammen geöffnet werden?

Auflösung. Die erste Oeffnung liefere x Maaß in jeder Mi-

nute, und die 2te y Maaß, so liefern beide zusammen eine Wassermenge von:

$$\text{I)}\quad 6x + 5\frac{1}{2}y = 409$$

$$\text{II.)}\quad 10x + 8y = 635.$$

Die erste gibt $31\frac{1}{2}$, die zweite 40 Maaß in der Minute; also braucht die erste

$$\frac{635}{71\frac{1}{2}} = 20\frac{10}{63},\ \text{und die 2te}\ \frac{635}{40} = 15\frac{7}{8}$$

Minuten, um das Behälter zu füllen; da ferner beide zusammen in jeder Minute $71\frac{1}{2}$ Maaß liefern, so brauchen beide zusammen $\frac{635}{71\frac{1}{2}} = 8\frac{126}{143}$ Minuten.

Anmerkung.

Es lassen sich manche Aufgaben, in welchen mehrere Unbekannte vorkommen, auch durch Bezeichnung von einer derselben mittelst einer einzigen Gleichung finden. Z. B.:

Man hätte in Nro. 2 das Geld des B $= x$ und das des A $= x + \frac{x}{3}$ annehmen können, so hätte man die Gleichung:

$x + 10 = x + \frac{x}{3} - 10$, und hieraus $x = 60$ erhalten.

In Aufgabe 5 könnte man auch das Gewicht des Silbers $= x$ und das des Kupfers $= 8 - x$ ℔ annehmen.

Ebenso können auch viele der in B. §. 6 und 7 gegebenen Aufgaben durch Annahme zweier unbekannten Größen gelöst werden. Z. B. §. 6. Nro. 4.

Es seien von der ersten Sorte x und von der 2ten y Maaß, so hat man I.) $48x + 24y = 135 . 32$, II.) $x + y = 135$ u. s. w.

§. 5. Aufgaben, welche durch Gleichungen des ersten Grades mit 2 Unbekannten gelöst werden können.

Löset folgende Aufgaben des §. 7 B. durch Annahme zweier unbekannten Größen:

1) Aufgabe 2, A x, B y.
2) „ 7, x Schwefel, x Kohle und y Salpeter.
3) „ 24, die 2 Theile seien x und y.
4) „ 25, der eine habe x, der andere y fl.

5) Aufgabe 27, der eine habe x, der andere y fl.
6) „ 37, es seien x Kronenthlr. und y Preuss. Thlr.
7) „ 38, der Taglohn des Gehülfen sei = x, der des Lehrlings = y Kreuzer.

8) Die Summe zweier Zahlen ist = **126**, wenn man die erste durch die 2te theilt, so erhält man 2 zum Quotienten und 6 als Rest; findet die 2 Zahlen!

9) Der Unterschied zweier Zahlen ist = **3**, und die 6fache erste ist um 9 größer als das Siebenfache der 2ten, wie heißen sie?

10) Das 10fache einer Zahl ist um 8 größer als das 6fache einer anderen, und das 3fache der ersten ist um 1 größer als die doppelte 2te Zahl; welche Zahlen sind es?

11) Zwei Personen **A** und **B** vergleichen ihr Vermögen, **A** sagt: ich habe 1000 fl. mehr als Du, worauf ihm **B** erwiedert, wenn ich Dir noch 1000 fl. von meinem Vermögen geben würde, dann hättest Du doppelt so viel als mir übrig bliebe. Wie viel Vermögen hat jeder?

12) 10 Pfunde einer Waare und 17 ℔ einer anderen kosten zusammen 3 fl. 2 kr., 9 Pfund von der ersten sind eben so viel werth als 12 ℔ von der 2ten; was kostet das Pfund von jeder Waare?

13) Man hat eine gewisse Menge Kochsalz in Wasser aufgelöst, diese Salzlösung wiegt 126 Pfund, und das Gefäß, welches damit angefüllt ist, hält 39 Maaß. Wenn nun eine Maaß Kochsalz 6 ℔ wiegt, und eine Maaß Wasser 3 ℔; wie viel Salz und Wasser enthält die Lösung?

14) Eine eiserne Hohlkugel (Bombe) wiegt, ehe sie mit Pulver gefüllt wird, doppelt so viel als eine andere leere Bombe; und in die erste werden 4 Pfund Pulver mehr gefüllt als in die 2te. Wenn nun die zwei gefüllten Bomben **110** ℔ und 56 ℔ wiegen; wie groß sind die Gewichte der leeren Bomben und wie viel Pfund Pulver kam in jede?

15) Das Kanonenmetall besteht aus Kupfer und Zinn, 1 Cubikfuß destillirtes Wasser wiegt 54 neubadische ℔, das specifische Gewicht des Kupfers ist = **8,9** und das des Zinns = **7,3**. Man hat nun eine Kanone, welche 4239 ℔ wiegt, in einem Wasserbehälter untersinken lassen, und fand aus der Höhe des Steigens des Wassers, daß die Kanone 9 Cubikfuß Inhalt hat; wie viel Cubikfuß Kupfer und Zinn enthält dieselbe und wie viel wiegen diese 2 Bestandtheile?

16) Eine Composition aus Zinn und Blei wiegt 150 ℔ und hat ein specifisches Gewicht = **8,2**; wie viel Zinn und Blei enthält dieselbe; wenn das specifische Gewicht des Zinns = **7,3** und das des Bleies = **11,35** ist?

17) Ein goldenes Gefäß wiegt 2 Pfund und hat ein specifisches Gewicht = **14**, da nun aber das specifische Gewicht des reinen Goldes = $19\frac{1}{4}$ ist, so kann das Gefäß nicht aus Gold allein bestehen. Wenn man nun weiß, daß das Gold gewöhnlich mit Silber

(spec. Gew. $= 10\frac{1}{2}$) oder mit Kupfer (8,9) versetzt wird; wie viel Gold und Silber, oder wie viel Gold und Kupfer enthält das Gefäß?

18) Zwei Stoffe **A** und **B**, von welchen jeder Cubikzoll **a** und **b** Loth wiegt, sollen in solcher Menge vermischt werden, daß eine Masse von **n** Lothen entsteht, von welcher jeder Cubikzoll **p** Loth wiegt; wie viel muß von jedem Stoff genommen werden?

19) 24 hessische Fuß und 20 badische sind zusammen gleich 12 Meter (**mètre**, franz. Längenmaaß), und 8 hessische und 5 badische Fuß haben zusammen eine Länge von $3\frac{1}{2}$ Meter. Wie viele hessische und wie viele badische Fuß geben ein Meter, und wie verhält sich der hessische Fuß zum badischen?

20) Ein Wechsel, der über 205 fl. ausgestellt ist, wird gegen 15 holländische Zehnguldenstücke und 10 holländische Ducaten eincassirt; für einen anderen im Betrag von 192 fl. erhält man zu demselben Curs 12 holländische Zehnguldenstücke und 13 Ducaten. Wie hoch sind beide Münzsorten gerechnet?

21) Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, welche, wenn man beide um 7 vermehrt, 2 Summen geben, die sich wie **3 : 4** verhalten; werden aber beide Zahlen um 5 vermindert, so ist die größere Differenz um 6 kleiner als die doppelte kleinere.

22) Vor fünf Jahren war ein Vater 6mal so alt als sein Sohn, und nach 15 Jahren wird er nur doppelt so alt sein; wie alt sind beide?

23) In einer Masse von 12 Centner Schießpulver ist eben so viel Schwefel als Kohle enthalten; der Gehalt an Salpeter ist aber um 3 Centner größer als der vierfache Kohlengehalt. Wie viel enthält das Pulver von jedem Bestandtheil?

24) In den Jahren 1828 bis 1830 wurden zu Carlsruhe badische Fünfthalerstücke (Ludwigsd'or) geprägt, deren reeller Werth 8 fl. 28,9 kr. betrug; während in Frankreich vom Jahre 1785 an Louisd'ors zu 11 fl. 16,7 kr. Werth geprägt wurden. Wenn nun Jemand von beiden Münzsorten so viele Stücke hatte, daß ihre reellen Werthe zusammen 310 fl. 23 kr. betrugen, und wenn er mit dem 5ten Theile der Fünfthalerstücke und der Hälfte der Louisd'ors und 8 **Sous** eine Rechnung bezahlen konnte, welche sich auf 129 fl. 56 kr. belief; wie viele Stücke hat er von jeder Sorte (wenn **5 Sous = 7** kr. sind)?

25) Der Werth der Schweizerfranken verhält sich zu dem der Guldenstücke wie **1225 : 1753**, und eine venetianische Zechine gilt 5 fl. 44 kr. Ein Handelsmann hat nun eine Zahlung nach Venedig zu machen im Betrage von 2794 fl., welche er in den drei erwähnten Münzsorten leisten kann. Nimmt er alle Schweizerfranken, welche er vorräthig hat, und den 3ten Theil seiner Zechinen, so kann er damit die Zahlung machen; nimmt er aber nur die Hälfte seiner Schweizerfranken und alle Zechinen, die er hat, so muß er noch 537 fl. dazu legen, um seine Verbindlichkeit zu erfüllen. Wie viele Schweizerfranken und wie viele Zechinen hat er?

26) Nach Sätzen der Geometrie findet man den Umfang eines Kreises annähernd dadurch, daß man den Durchmesser mit $\frac{22}{7}$, oder auf andere Art, daß man denselben mit **3,14** multiplicirt.

Die Umfänge zweier Kreise, von welchen der erste nach der ersten Art und der 2te nach der anderen Art gerechnet wurde, betragen zusammen 534 Zoll; wenn aber der erste durch Anwendung der Zahl **3,14** und der andere Umfang durch Anwendung der Zahl $\frac{22}{7}$ berechnet worden wäre, so hätten beide zusammen $534\frac{3}{35}$ Zoll betragen. Wie groß sind die 2 Durchmesser?

27) Ein Dampfschiff fährt von einem Orte **A** nach einem Orte **B** und kann, da es stromaufwärts muß, in jeder Stunde nur $\frac{2}{3}$ Meilen zurücklegen. Ein anderes fährt von **B** nach **A** um mehrere Stunden später ab als das erste, und legt in jeder Stunde 3 Meilen zurück. Beide treffen an einer Zwischenstation zusammen, welche 20 Meilen weiter von **B** entfernt ist als von **A**, und der Capitain des 2ten Schiffes sagt zu dem des ersten: „wäre ich heute Morgen schon um 8 Uhr statt um 10 Uhr abgefahren, so hätte ich jetzt schon $\frac{9}{10}$ des ganzen Weges von **B** nach **A** zurückgelegt."

Suchet nun: 1) wie lange beide Schiffe bis zum Zusammentreffen unterwegs waren; 2) um wie viel Uhr das erste abfuhr; 3) wie weit die Zwischenstation von **A** und **B** entfernt ist, und 4) die Entfernung von **A** und **B**.

28) Löset Aufg. 51 §. 7 dadurch, daß das eine Capital = **x** und das andere = **y** gesetzt wird.

29) Suchet die in §. 7 Aufg. 75 bezeichnete Zahl durch zwei Gleichungen.

30) Zwei Personen **A** und **B** reisen von 2 Orten **C** und **D** einer Zusammenkunft wegen in der Weise ab, daß **A** einen Tag früher abgeht als **B**, dieser legt aber jeden Tag eine Stunde Weg mehr zurück als **A**. Der Ort, an welchem sie zusammentreffen, liegt gleich weit von **C** und **D** entfernt. Wäre **B** 5 Tage früher abgereist als **A**, so hätte er jeden Tag 4 Stunden weniger zurücklegen können als er jetzt zurückgelegt hat, und wäre doch an demselben Orte mit **A** zusammengetroffen. Wie viele Tage ist jeder gereist; wie viele Stunden hat jeder täglich zurückgelegt, und wie weit ist der Ort **C** von **D** entfernt?

31) Ein Stück Feld hat die Form eines Rechtecks, der Umfang desselben ist = **260** Ruthen; wäre die Breite um 8 und die Länge um 10 Ruthen größer, dann hätte das Feld 2 Morgen 3 Viertel und 80 Ruthen (1180 R.) mehr Inhalt als jetzt. Wie lang und wie breit ist es?

32) Ein Capitalist berechnet, daß wenn er sein Geld um 1 Procent höher anlegen könnte, er 4000 fl. weniger auszuleihen habe, um

doch denselben Zins zu erhalten. Wollte er aber den Zinsfuß um $\frac{1}{2}$ Procent niedriger stellen, so müßte er 5000 fl. mehr ausleihen, um 75 fl. mehr Zins zu erhalten als jetzt. Wie viel hat er ausgeliehen, zu welchem Zinsfuß, und wie viel Zins erhält er jedes Jahr?

33) Ein Gärtner macht einen Plan zu einer Baumschule, er findet aber, daß ihm bei seinen Annahmen noch 1170 Stück Setzlinge übrig bleiben, welche auf dem rechteckigen Stück Land keinen Platz mehr fänden. Er nimmt nun die Bäumchen in solcher Entfernung von einander, daß in jede Längenreihe 12 Stück mehr gesetzt werden können und daß 4 Reihen mehr entstehen als vorher; nun fehlen ihm 322 Setzlinge. Als er nun einen 3ten Plan entwirft, wonach in jede Reihe 8 Stück mehr und 3 Reihen mehr als im ersten Plane gesetzt werden sollen, so bleiben ihm wieder 120 Stück von seinen Bäumchen übrig. Wie viele Reihen und wie viele Bäumchen in jeder Reihe nahm er bei jedem der drei Entwürfe an, und wie viele Setzlinge hat er?

34) Wenn wir nun den ersten Plan, welchen der Gärtner machte, zu Grunde legen und in jede Reihe eine bestimmte Anzahl Bäume mehr setzen und auch die Zahl der Reihen verhältnißmäßig mit den Annahmen des ersten Planes vergrößern wollen, um die 12000 Bäume alle unterzubringen; wie viele Reihen mehr müssen angenommen werden, um wie viele Bäume muß jede Reihe vermehrt werden, und wie müssen die Bäumchen gesetzt werden, damit alle Platz finden?

35) Es soll eine dreizifferige Zahl gefunden werden, welche folgende Eigenschaften hat: Alle 3 Ziffern zusammengezählt, geben die Summe 18; das Quadrat der Summe der 2 ersten Ziffern ist um 36 größer als das Quadrat der 3ten Ziffer; zieht man von der gesuchten Zahl die Zahl 36 ab und nimmt den Rest doppelt, so erhält man eine Zahl, deren Ziffern dieselben sind wie die der gesuchten Zahl, nur stehen diese Ziffern in umgekehrter Ordnung.

36) Der Inhalt eines Quadrats ist um p Fuß größer als der Inhalt eines anderen, wenn man aber die Seiten des ersten um **a** Fuß kleiner und die des 2ten um **a** Fuß größer macht; so ist der Inhalt des ersten um n Fuß größer als der des 2ten. Wie groß sind die Seiten der 2 Quadrate?

37) Die Inhalte zweier Quadrate differiren um 112 Fuß; wäre die Seite des ersten um 1 Fuß kleiner, und die des 2ten um 1 Fuß größer; so wäre der Inhalt des ersten noch um 56 Fuß größer als der des 2ten. Suchet die Seiten der 2 Quadrate unmittelbar, und aus den in **Nro.** 36 gefundenen Formeln.

§. 6. Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

a) Es läßt sich auf ähnliche Art wie in §. 1 *a* nachweisen, daß, wenn 3 oder 4 oder n unbekannte Größen zu finden sind, auch 3, 4 oder n Gleichungen gegeben sein müssen (wovon keine aus den anderen gefolgert werden kann).

Z. B. I) $x + y + z = 34$

II) $x - y + 2z = 26$.

Aus I) $z = 34 - x - y$; aus II) $z = 13 - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$,

daher ist $34 - x - y = 13 - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$, oder (A) $x + 3y = 42$.

Nun läßt sich aus dieser Gleichung x und y nicht finden, hat man aber noch eine dritte, z. B.

III) $3x - 2y + z = 19$, so ist $z = 19 - 3x + 2y$;

daher, wenn man diesen Werth dem ersten Werthe von z gleichsetzt:

$34 - x - y = 19 - 3x + 2y$, (B) $2x - 3y = -15$.

Aus den Gleichungen A und B folgt:

$x = 9$, $y = 11$, daher $z = 14$.

Setzt man aber den 3ten Werth von z dem 2ten gleich, so entsteht die Gleichung:

$19 - 3x + 2y = 13 - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$, (C) $5x - 3y = 12$,

welche, mit A oder B zusammengenommen, wieder dieselben Werthe für x und y gibt.

b) Es seien nun zunächst 3 Gleichungen gegeben, wovon die eine nur 2 Unbekannte enthält. Z. B.

I) $2x + 3y = 11$.

II) $5x - 8y + z = 22$.

III) $3x - 4y + 2z = 28$.

Man bringe z weg, auf eine der 3 Arten, welche bei den Gleichungen mit 2 Unbekannten gezeigt wurden; z. B.

II . 2 — III gibt: $7x - 12y = 16$ (IV);

IV nehme man nun mit I zusammen, und suche x und y; so folgt

$x = 4$, $y = 1$.

Setzt man diese Werthe in II oder III, so erhält man $z = 10$.

Man eliminirt also in diesem Falle diejenige Unbekannte, welche in der Gleichung die nur 2 Unbekannte enthält, nicht vorkommt.

Wenn zwei Gleichungen nur zwei, und zwar die nämlichen, Unbekannte enthalten, so sucht man diese zuerst und setzt dann ihre Werthe in die dritte Gleichung; wodurch dann auch der Werth der dritten Unbekannten gefunden wird.

c) Wenn alle 3 Gleichungen 3 Unbekannte enthalten, so bringe aus I und II eine Unbekannte weg, wodurch eine neue

Gleichung IV entsteht; dann eliminire aus I und III oder aus II und III die nämliche Unbekannte; so folgt eine weitere Gleichung V, welche mit IV die 2 nämlichen Unbekannten hat.

Aus IV und V findet man nun 2 Werthe und, durch Substitution derselben in eine der 3 Gleichungen, auch die 3te Unbekannte.

Z. B.
$$\left.\begin{array}{rl} \text{I)} & 2x + 5y - z = 9 \\ \text{II)} & x + 8y - 3z = 8 \\ \text{III)} & 5x + 3y + 2z = 17 \end{array}\right\}$$

Erste Auflösung. Man eliminire z. B. zuerst z.

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(I . 3) gibt:} & 6x + 15z - 3z = 27 \\ \text{II)} & x + 8y - 3z = 8 \end{array}\right\} \text{subtrah.}$$

$$\text{gibt: IV)}\quad 5x + 7y = 19$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(I . 2)} & 4x + 10y - 2z = 18 \\ \text{III)} & 5x + 3y + 2z = 17 \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$\text{V)}\quad 9x + 13y = 35.$$

Wird nun IV und V zusammengenommen, so erhält man:

$$x = 1, \quad y = 2;$$

beide in I gesetzt, gibt: $2 + 10 - z = 9$, also $z = 3$.

Andere Auflösung.

Aus I ist $x = \frac{9 - 5y + z}{2}$, setze diesen Werth statt x in II und III, so folgen 2 Gleichungen für y und z u. s. w.

Dritte Auflösung.

Suche z. B. y aus allen 3 Gleichungen, und setze die 3 Werthe für z einander gleich (siehe *a*).

d) Aus dem Vorhergehenden läßt sich nun leicht das Verfahren folgern, welches für 4, 5 . . . Unbekannte gilt; es wird für n Gleichungen mit n Unbekannten im Allgemeinen folgendes sein:

Man bringt die n Gleichungen durch Elimination einer und derselben Unbekannten auf n — 1 Gleichungen mit n — 1 Unbekannten; diese durch Ausscheidung einer weiteren unbekannten Größe auf n — 2 Gleichungen mit n — 2 Unbekannten u. s. w., bis man zuletzt nur **eine** Gleichung mit **einer** Unbekannten erhält, welche dann aufgelöst wird. Dann substituirt man den aus dieser Gleichung gefundenen Werth wieder rückwärts

in die früheren Gleichungen, um die übrigen Unbekannten zu finden.

3. B.	I)	$10x + 2y + 3z + 4u + 3v = 23$	Bringe z. B. zuerst v weg!
	II)	$3x - 5y - 2z - 7u + v = 4$	
	III)	$x - 2y - z + 9u - 2v = 16$	
	IV)	$9x + 13y + 9z - 2u + 6v = 3$	
	V)	$2x - y + 3z + 8u - 4v = 16$	

(I − II.3)	$x + 17y + 9z + 25u = 11$ (VI)	nun u eliminirt!
(II.2 + III)	$7x - 12y - 5z - 5u = 24$ (VII)	
(III.3 + IV)	$12x + 7y + 6z + 25u = 51$ (VIII)	
(II.4 + V)	$14x - 21y - 5z - 20u = 32$ (IX)	

(VI + VII.5)	$36x - 43y - 16z = 131$ (X)	z eliminirt!
(VIII − VI)	$11x - 10y - 3z = 40$ (XI)	
(VII.4 − IX)	$14x - 27y - 15z = 64$ (XII)	

(X.3 − XI.16)	$-68x + 31y = -247$ (XIII)	y ausgeschieden!
(XI.5 − XII)	$41x - 23y = 136$ (XIV)	

(XIII.23 + XIV.31) $-293x = -1465$, daher $x = \frac{1465}{293} = 5.$

Diesen Werth von x in XIII oder XIV gesetzt, gibt $y = 3$.
x und y in X, XI oder XII " " $z = -5$.
x, y und z z. B. in VII " " $u = 0$.
x, y, z und u z. B. in II " " $v = -6$.

Anmerkung.

In manchen Fällen lassen sich die Auflösungen abkürzen, wenn man durch Addition oder Subtraction mehrerer Gleichungen eine andere (kürzere) sucht, welche dann mit den gegebenen verbunden wird.

Es können jedoch hierüber keine besonderen Regeln gegeben werden, die Form der Gleichungen und die Coefficienten bestimmen, ob eine Abkürzung möglich ist, oder ob auf die gewöhnliche Weise verfahren werden muß.

§. 7. Auflösung einiger Gleichungen mit mehr als 2 Unbekannten.

1) I) $2x + 3y = 5$
II) $5x - 3y = 2$
III) $3x - 4y + 2z = -13$

(I + II) $7x = 7$, $x = 1$, in I gesetzt, gibt: $y = 1$, beide in III gesetzt, so folgt: $z = -6$.

2) I) $7x + 12y = 86$
II) $3x - 8z = 2$
III) $5y + 4z = 32$

(II + III . 2) $3x + 10y = 66$ (IV),
nehme nun IV mit I zusammen u. s. w., so wird

$$x = 2,\ y = 6,\ z = \frac{1}{2},$$ (findet dieselben!)

3) I) $5x + 3y + 8z = 35$
II) $9x + 14y - 7z = 16$
III) $3x + 11z = 36$

Suchet z. B. y aus I, und setzet dessen Werth in II; so folgt eine Gleichung IV, welche x und z enthält.

Man findet $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. (Suchet diese Werthe!)

4) I) $x + y + z = 10$
II) $3x + 4y + 2z = 25$
III) $4x - 7y + 3z = 11$

Bildet II − I . 2 = IV, und III − I . 3 = V u. s. w.; so wird $x = 1$, $y = 2$, $z = 7$.

Suchet diese Werthe!

5) I) $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 2$
II) $\frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 3$
III) $\frac{x}{m} + \frac{3z}{p} = 7$

II − I, gibt $\frac{z}{p} - \frac{x}{m} = 1$, hiezu III addirt, gibt: $\frac{4z}{p} = 8$, folglich $z = 2p$. In III gesetzt, gibt: $x = m$, und in II, $y = n$.

6) I) $x + y + z = 1$
II) $x + y + u = -1\frac{1}{2}$
III) $x + z + u = \frac{1}{2}$
IV) $y + z + u = 6$

Erste Auflösung.

$$\left.\begin{array}{lll}(II - III) & y - z = -2 & (V) \\ (III - IV) & x - y = -5\frac{1}{2} & (VI) \\ \text{und} & x + y + z = 1 & (I)\end{array}\right\}$$

$$(V + I) \quad x + 2y = -1 \quad (VII)$$

$$(VII - VI) \qquad 3y = 4\frac{1}{2}, \text{ also } y = 1\frac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

Man findet ferner: $x = -4$, $z = 3\frac{1}{2}$, $u = 1$, (suchet dieses!)

2te Auflösung.

Man addire die 4 Gleichungen, so folgt:

$$3x + 3y + 3z + 3u = 6, \text{ folglich } x + y + z + u = 2.$$

Von dieser Gleichung ziehe man nun die Gleichungen I, II, III und IV ab; so erhält man:

$$u = 1, \quad z = 3\frac{1}{2}, \quad y = 1\frac{1}{2}, \quad x = -4.$$

7)
$$\left.\begin{array}{ll}I) & \frac{15}{x} + \frac{4}{y} + \frac{7}{z} = 52 \\ II) & \frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = 7 \\ III) & \frac{2}{3x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{3z} = \frac{35}{3}\end{array}\right\}$$

Man bringe z. B. zuerst den Bruch $\frac{1}{y}$ weg:

$$(I + II.2) \ \frac{21}{x} + \frac{15}{z} = 66, \text{ oder } \frac{7}{x} + \frac{5}{z} = 22 \ (IV)$$

$$(II.3 + III.2) \ \frac{31}{3x} + \frac{34}{3z} = \frac{133}{3}, \text{ oder } \frac{31}{x} + \frac{34}{z} = 133 \ (V)$$

$$(IV.34 - V.5) \quad \frac{83}{x} = 83.$$

Hieraus wieder $x = 1$; dann $z = \frac{1}{3}$, und $y = \frac{1}{4}$, (suchet diese Werthe!)

§. 8. Aufgaben.

1) I) $x+y=3$, II) $x+z=19$, III) $y+z=20$.

2) I) $3x+4y=7$, II) $6x+5y=11$, III) $3x-2y+z=7$.

3) I) $4x+5z=90$, II) $7x-8y=62$, III) $y-z=-9$.

4) I) $9x-4y=86$, II) $3x-5z=20$, III) $2y+15z=32$.

5) I) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=7$, II) $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=0$, III) $\frac{z}{5}=\frac{x}{2}$.

6) I) $\frac{5}{x}-\frac{8}{y}=0$, II) $\frac{3}{y}+\frac{7}{z}=\frac{11}{8}$, III) $\frac{5}{x}+\frac{4}{z}=\frac{11}{7}$.

7) I) $ax=by$, II) $cy=dz$, III) $fz=gx+h$.

8) I) $ax+by=g$, II) $cx+dz=h$, III) $fy+z=n$.

9) $$\left\{\begin{array}{l} 5x+6y-z=2 \\ 9x-7y+2z=1\frac{7}{15} \\ 2x-3y+z=\frac{2}{5} \end{array}\right\}$$

10) $$\left\{\begin{array}{l} 9x-8y+3z=107 \\ 13x+12y+8z=-3 \\ 2\frac{1}{2}x+3y-5z=-18\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

11) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{10}+\frac{y}{9}-\frac{3z}{16}=5 \\ \frac{3x}{4}-\frac{5y}{4}+\frac{2z}{3}=62 \\ x+y+z=184 \end{array}\right\}$$

12) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{100}-y+2z=61 \\ \frac{3x}{25}+2y-83=\frac{z}{48} \\ -\frac{x}{2}+\frac{y}{18}+48=0 \end{array}\right\}$$

13) $$\left\{\begin{array}{l} x:y=9:17 \\ 2x+1:z=37:1 \\ \frac{x}{2}+y:z+3x=43:55 \end{array}\right\}$$ Aus diesen 3 Proportionen mit Hülfe von 3 Gleichungen x, y und z zu finden.

14) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y+z}{3x-5y-z}=\frac{11}{17} \\ \frac{3}{x-y-z}=\frac{9}{2x-y} \\ \frac{19x-151}{y-z}=-1 \end{array}\right\}$$

15) $$\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+z=4 \\ y+z=5 \\ z+u=7 \end{array}\right\}$$

$$16)\ \begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}-\frac{7}{z}=1 \\ \frac{5}{x}+\frac{10}{y}+\frac{1}{z}=3\frac{17}{21} \\ \frac{9}{2x}-\frac{1}{y}+\frac{7}{5z}=1\frac{1}{2} \end{cases} \qquad 17)\ \begin{cases} \frac{ax+z}{y-z}=\frac{1+b}{1-b} \\ \frac{2ax-3b}{2y-3z}=1 \\ \frac{5z-4b}{3a^2x-2ay}=\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$18)\ \begin{cases} \text{I)}\ 3\frac{1}{3}x+5\frac{1}{2}y=70. \quad \text{II)}\ 3{,}8x-105\frac{2}{3}=-4\frac{5}{6}z \\ \text{III)}\ 41z+48\frac{1}{8}u=1729. \quad \text{IV)}\ 8{,}9x+14{,}2y=183\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$19)\ \begin{cases} 0{,}03x+0{,}7y+0{,}04z=77. \\ 0{,}12x-1{,}3y+4{,}76z=358. \\ 5{,}09x+1{,}76z-6{,}84u=1. \\ 8x+0{,}5y-7{,}43u=107. \end{cases}$$

$$20)\ \begin{cases} x+y+z+u+v=2\frac{1}{2}. \\ 3x+2y+z+3u+v=4\frac{1}{2}. \\ x-y-3z+2u+8v=1. \\ 9x-5y-2z-u+5v=2\frac{1}{2}. \\ -\frac{x}{2}+y-4z+2u+v=0. \end{cases}$$

$$21)\ \begin{cases} \text{I)}\ \frac{2x+y}{z+u}=1+\frac{b}{a}. \quad \text{II)}\ \frac{2z-u}{2x-y}=\frac{a}{b-a} \\ \text{III)}\ \frac{2x-y-z+b}{4x-a}=1. \quad \text{IV)}\ \frac{8x-3u}{2y+z}=\frac{a}{2b} \end{cases}$$

§. 9. Aufgaben, welche durch Gleichungen mit mehr als 2 Unbekannten zu lösen sind.

1) Man soll das Vermögen dreier Personen **A**, **B** und **C** bestimmen. **A** und **B** besitzen zusammen 17000 fl., **A** und **C** zusammen 23000, **B** und **C** aber zusammen 22000 fl.

2) Die Zahl 120 soll in drei solche Theile zerlegt werden, daß der erste um 4 kleiner ist als der 2te, der 3te aber soll um 4 größer sein als die Hälfte des ersten.

3) In einer Festung sind 6800 Mann Besatzung, und zwar nach Abrechnung der Offiziere und Unteroffiziere: 4050 Infanteristen, 914 Cavalleristen und 1036 Artilleristen, welche alle fünf Tage ihre Löhnung ausbezahlt erhalten. Die Infanteristen und Cavalleristen erhalten zusammen 3385 fl. 30 kr., die Infanteristen und Artilleristen aber 3563 fl. 20 kr., und die Cavalleristen und Artilleristen zusammen 1548 fl. 50 kr. Wie viel beträgt die tägliche Löhnung eines jeden Soldaten von jeder der 3 Waffengattungen?

4) Ein Mann ist jetzt gerade so alt als seine Frau und sein Sohn zusammen. Vor 6 Jahren war er 11 mal so alt als sein Sohn, und vor 10 Jahren war er um ein Drittheil älter als seine Frau; wie alt sind jetzt die 3 Personen?

5) Ein Kaufmann hat dreierlei Sorten Zucker, nämlich zu 20, 21 und 23 Krz. das Pfund. Verkauft er von jeder Sorte die Hälfte, so löst er 88 fl.; verkauft er aber von der ersten Sorte nur den 5ten, von der 2ten den 3ten Theil und von der dritten die Hälfte, so nimmt er dafür im Ganzen 58 fl. 20 kr. ein. Wenn nun sein ganzer Zuckervorrath 500 Pfund beträgt, wie viel hat er von jeder Sorte?

6) Ein Weinhändler hat dreierlei Wein, von der ersten Sorte 600 Maaß, von der 2ten 1200 und von der 3ten 900 Maaß. Mischt er alle 3 mit einander, so daß er nur eine Sorte erhält, so kann er von dieser jede Maaß zu $41\frac{1}{3}$ kr. geben. Nimmt er aber die Hälfte der ersten, den 8ten Theil der 2ten und den 4ten Theil der 3ten Sorte in eine Mischung; so kann er diese um 520 fl. verkaufen. Er gibt nun von jeder Sorte eine Maaß zu Proben ab und berechnet, daß er für diese Proben 2 fl. 12 kr. erhalten hätte; wie viel kostet jede Maaß der drei Weinsorten?

7) Der Umfang eines Dreiecks ist = 300 Fuß. Der 3te Theil der kleinsten Seite, der 4te Theil der größten und die Hälfte der dritten Seite sind zusammen 107 Fuß lang; wären die 2 kleineren Seiten doppelt so groß als sie wirklich sind, dann wären sie zusammen um 40 Fuß länger als die 3fache größte Seite. Wie groß sind die drei Seiten?

8) Es wechselt Jemand 26 Rubel (russische Münzsorte) und 120 polnische Gulden für 83 fl.; dann 39 Rubel und 92 Thaler Hamburger Banko für 318 fl. 30 kr.; ferner 78 Rubel, 180 polnische Gulden und 23 Thaler H. B. zu 259 fl. 15 kr. Wie hoch wurde jede Münzsorte gerechnet?

9) 9 franz. Fuß, 4 hessische und 100 alt badische Fuß sind zusammen 110 neubad. Fuß; 3 franz., 200 alt bad. und 12 hessische Fuß zusammen, geben $206\frac{1}{3}$ neubadische Fuß, und 1 franz., 40 hessische und $65\frac{8}{9}$ neubadische haben zusammen eine Länge von 100 alt bad. Fuß. Wie lang ist jedes Maaß im neubadischen Fuß ausgedrückt?

10) Man soll 3 Zahlen finden, welche folgende Eigenschaften haben: Theilt man 12 durch die erste, 18 durch die 2te, und 16 durch die dritte; so erhält man 3 Quotienten, deren Summ. = 7

ist. Theilt man aber die 3 Zahlen 36, 9 und 8 einzeln der Reihe nach durch die 3 gesuchten Zahlen, so erhält man 6 als Summe der Quotienten; und theilt man die 3 Zahlen 4, 27 und 9 einzeln durch dieselben, so ist die Quotientensumme $= 5\frac{7}{12}$.

11) Von einer dreizifferigen Zahl ist die doppelte 2te Ziffer um 4 größer als die Summe der 2 anderen Ziffern, die 7fache erste Ziffer ist um die 2te Ziffer größer als die 3fache 3te; läßt man aber die 3te Ziffer der Zahl weg und setzt dafür eine Null (oder zieht man die 3te Ziffer von der Zahl ab), so erhält man das 60fache der 2ten Ziffer. Wie heißt die Zahl?

12) Die erste Ziffer einer dreizifferigen Zahl ist um $\frac{1}{2}$ kleiner als die halbe Summe der 2 anderen, die Summe der 3 Ziffern ist $= 22$, und wenn man statt der 2ten Ziffer eine Null setzt, so erhält man eine Zahl, welche 101 mal größer ist als die erste Ziffer. Welche Zahl hat diese Eigenschaften?

13) Es hat Jemand drei Metallmischungen, welche aus Kupfer, Zinn und Zink bestehen. Die eine Metallmischung enthält 40 Cubikzoll Kupfer, 15 Cubikzoll Zinn und 6 Cubikzoll Zink, und wiegt 27 Pfund 6 Loth. Die andere, welche 32 ℔ 8 Loth wiegt, enthält 50 Cubikzoll Kupfer, 10 Cubikzoll Zinn und 12 Cubikzoll Zink; und die 3te, welche aus 36 Cubikzoll Kupfer, 8 Cubikzoll Zinn und 9 Cubikzoll Zink besteht, wiegt 23 ℔ $21\frac{1}{2}$ Loth. Man soll aus diesen Angaben das Gewicht eines Cubikzolles der 3 Mischungsbestandtheile finden.

14) Es kauft Jemand dreierlei Waaren, von der ersten für 12 fl., von der zweiten für 12 fl. und von der dritten für 4 fl.; im Ganzen 76 Ellen. Hätte er von der ersten Waare für $7\frac{1}{2}$ fl., von der 2ten für 8 fl. und von der 3ten für $9\frac{1}{2}$ fl. gekauft, so hätte er im Ganzen eine Elle mehr erhalten. Bei einem anderen Kaufmann kauft er von denselben Waaren und zu gleichen Preisen wie bisher, er bezahlt für 48 Ellen 14 fl. 55 kr.; nämlich für die erste 3 fl., für die 2te $5\frac{2}{3}$ fl., und für die dritte $6\frac{1}{4}$ fl. Was kostet jede Elle von den 3 Waaren, und wie viele Ellen hat er zuletzt von jeder Waare gekauft?

15) Ein Stück Messing wiegt 150 ℔ und besteht aus 33 Gewichtstheilen Kupfer, 16 Theilen Zink und 1 Theil Blei. Dieses wird mit einem anderen Stück Messing, welches 250 ℔ wiegt und dieselben Bestandtheile enthält (aber nicht in gleichem Mischungsverhältniß), zusammengeschmolzen; wodurch eine Legirung entsteht, die aus 16 Theilen Kupfer, 8 Theilen Zink und 1 Theil Blei besteht. Wie viel Kupfer, Zink und Blei enthielt das 2te Stück Messing?

16) Um einen See führt eine Landstraße durch vier Dörfer A, B, C und D. Der Weg von A über B und C nach D ist $8\frac{3}{4}$ Stunden lang; von B über C und D nach A ist derselbe $= 9\frac{1}{2}$ Stunden. Zwischen den Orten C und B ist der Weg, wenn man über D und A geht, $10\frac{1}{2}$ Stunden; und von D über A und B nach C hat die Straße eine Länge von $10\frac{1}{4}$ Stunden. Wie lang ist der Weg zwischen je 2 Ortschaften?

17) Eine vierzifferige Zahl hat folgende Eigenschaften: 1) der 11te Theil derselben ist = der 55fachen 2ten Ziffer, 2) die doppelte erste Ziffer ist um 1 kleiner als die Summe der 3 anderen Ziffern, 3) Wenn man alle 4 Ziffern zusammenzählt und diese Summe verdreifacht, so entsteht eine zweizifferige Zahl und zwar dieselbe, welche man erhalten wird, wenn man an der gesuchten Zahl die 2 letzten Ziffern wegläßt. 4) Schreibt man die Ziffern in umgekehrter Ordnung an, so ist die dadurch entstehende Zahl um 1089 kleiner als die gesuchte; welche Zahl hat diese Eigenschaften?

18) Eine Familie besteht aus 5 Personen. Der Vater ist so alt als die Mutter der jüngere Sohn und die Tochter zusammen; vor einem Jahre war der Vater um 4 Jahre jünger als die Mutter und der ältere Sohn zusammen. Nach 10 Jahren wäre die Mutter so alt als ihre 2 Söhne zusammen; der Unterschied zwischen dem Alter der 2 Söhne ist = dem doppelten Alter der Tochter, und nach einem Jahre sind alle 5 zusammen 135 Jahre alt. Wie alt ist nun jede Person?

D. Gleichungen vom zweiten Grade.

§. 1. Reine quadratische Gleichungen.

Die allgemeine Form derselben ist nach A. §. 1.

$$ax^2 = b.$$

Hieraus $x^2 = \frac{b}{a}$ und, wenn auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen wird, so ist:

$$x = +\sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ oder auch } x = -\sqrt{\frac{b}{a}}. \quad \text{(III. §. 10 } e.)$$

Die unbekannte Größe hat daher bei allen reinquadratischen Gleichungen zwei gleiche entgegengesetzte Werthe.

Beispiele.

1) $5x^2 = 80$; hieraus $x^2 = 16$, $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$.

2) $$2\frac{3}{4}x^2 - 5 = -\frac{7x^2}{2}.$$

Ordne die Gleichung und bringe sie auf die allgemeine Form $ax^2 = b$, so folgt:

$$\left(\frac{11}{4} + \frac{7}{2}\right)x^2 = 5, \quad \frac{25}{4}x^2 = 5, \quad x^2 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5},$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\sqrt{0,8} = \pm\, 0,894427\ \ldots.$$

3) $$(a + x)(a - 2x) + 3a^2 = a(2a - x).$$

Hieraus: $a^2 - ax - 2x^2 = 2a^2 - ax - 3a^2,$

oder: $2x^2 = 2a^2, \qquad x^2 = a^2;$

folglich $x = \pm\sqrt{a^2} = \pm\, a.$

Anmerkung.

Wenn in der allgemeinen Form die Größe b negativ angenommen wird, und a positiv ist, so erhält man

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}},$$

daher ist x unmöglich.

§. 2. Aufgaben über reine quadratische Gleichungen.

1) $x^2 = 169$, 2) $x^2 = \frac{7}{5}$, 3) $x^2 = 0,08716$.

4) $3x^2 = 432$, 5) $2x^2 = -7,8408$, 6) $a^2x^2 = \frac{2b^4}{c^6}$.

7) $\frac{5x^2}{7} = \frac{7a^2}{5}$, 8) $4\frac{1}{10}x^2 + \frac{7}{8} = \frac{3x^2}{5}$.

9) $(3x + 4)(3x - 4) = 5x^2 - 7$.

10) $$\sqrt{\left(\frac{49}{x^2} + 8\right)} = 1 + \sqrt{\left(\frac{49}{x^2} + 3\right)}.$$

11) $$\frac{ab}{a - x} - x - a = \frac{ab}{x - a} \quad \left(\text{oder} = -\frac{ab}{a - x}\,!\right)$$

12) $$\frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} = \frac{4 + x}{x^2 - 1}.$$

§. 3. Aufgaben, welche durch reine quadratische Gleichungen gelöst werden können.

1) Von welcher Zahl ist die 2te Potenz = 315844?

2) Wenn der Inhalt eines Quadrats = 90540,81 Fuß ist; wie groß ist die Seite desselben?

3) Eine Zahl zu finden, welche mit ihrem vierten Theile multiplicirt 48400 gibt.

4) Wenn man die Zahl 80 zum Quadrat einer gewissen Zahl addirt, so erhält man das 6fache Quadrat dieser Zahl; wie heißt dieselbe?

5) Wenn man den dritten Theil einer Zahl mit dem fünften Theil derselben multiplicirt, so erhält man 60; wie heißt die Zahl?

6) Welche Zahl muß mit 288 multiplicirt werden, wenn man hierdurch den doppelten Cubus der Zahl erhalten soll?

7) Von zwei Zahlen ist die eine 5mal so groß als die andere, multiplicirt man beide und theilt das Produkt durch 3, so erhält man 135. Wie heißen die zwei Zahlen?

8) Nach einem Satze der Physik findet man den Raum, welchen ein freifallender Körper vermöge der Anziehungskraft der Erde zurücklegt, wenn man die Zahl der Secunden, welche er sich bewegte, ins Quadrat erhebt und dann mit **16,35** neubad. Fuß multiplicirt. Wenn nun ein Körper 184 Fuß Fallhöhe hat; wie lange muß er sich bewegen?

9) Wenn man zu einer Zahl 50 addirt, und von derselben Zahl auch 50 abzieht, so ist das Produkt der dadurch erhaltenen Summe und Differenz = **1100**; wie heißt jene Zahl?

10) Die Länge eines Rechtecks ist 3mal so groß als die Breite, und der Inhalt desselben ist = **300** Fuß; wie lang und wie breit ist dasselbe?

11) Eine gewisse Anzahl Personen verzehren in einem Gasthofe zusammen $12\frac{1}{2}$ fl., und es findet sich, daß jede halb so viel Gulden bezahlen muß als es Personen sind; wie groß ist die Zahl der Personen?

12) Wenn jedes Pfund einer gewissen Waare zu halb so viel Kreuzer verkauft wird als die Zahl der Pfunde beträgt, so löst man 10 fl. mehr als wenn jedes Pfund zu $\frac{1}{3}$ so viel Kreuzer gegeben würde als es Pfunde sind. Was wiegt die Waare?

13) Wenn s die Seite eines gleichseitigen Dreiecks und J dessen Inhalt bezeichnet, so ist nach der Geometrie $J = \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3}$; rechnet nun hiernach, wie groß die Seite sein muß, wenn der Inhalt $= J$, oder wenn derselbe $=$ **173,2051** Fuß ist!

14) Wenn man die beiden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks mit b, und die dritte Seite mit a bezeichnet; so ist der Inhalt desselben $= J = \frac{a}{4}\sqrt{(4b^2 - a^2)}$. Wenn nun der Inhalt eines solchen Dreiecks = **1200** Fuß, und die dritte Seite = **60** Fuß ist; wie groß sind die 2 gleichen Seiten?

15) Wie heißt die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Zahlen 36 und 49, und um wie viel differirt dieselbe von dem arithmetischen Mittel?

16) Wie groß ist der Unterschied zwischen der arithmetischen und geometrischen mittleren Proportionalen der zwei Zahlen a und b?

17) 689 fl. Capital sind eine bestimmte Anzahl Jahre auf Zinsen gestanden, und zwar zu halb so viel Procenten als die Zahl der Jahre beträgt; sie sind dadurch auf 1033 fl. 30 kr. angewachsen. Wie lange war das Capital ausgeliehen, und zu wie viel Procenten wurde es verzinst?

18) Wenn man von einer gewissen Zahl 2 abzieht und zu derselben Zahl auch 2 addirt, und alsdann die Zahl 140 durch die Differenz theilt; so ist der Quotient um 4 größer, als wenn man 140 durch die erhaltene Summe getheilt hätte. Wie heißt die Zahl?

§. 4. Gemischte quadratische Gleichungen.

a) Die gemischten oder unreinen quadratischen Gleichungen enthalten nach A. §. 1, außer dem Quadrat der Unbekannten, auch noch die erste Potenz derselben. Die allgemeine Form ist demnach:

$$mx^2 + nx = p.$$

Theilt man mit m, so folgt: $x^2 + \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}$;

oder, wenn man die bekannten Glieder mit a und b bezeichnet:

$$x^2 + ax = b.$$

Durch die Auflösung dieser allgemeinen Gleichung sind auch die Auflösungen aller gemischten quadratischen Gleichungen gegeben, und wir wollen nun die verschiedenen Auflösungsarten kennen lernen.

Erste Auflösung.

Man setze $x = y + m$, wobei m eine aus der gegebenen Gleichung zu bestimmende Zahl bedeutet, so ist:

$$(y + m)^2 + a(y + m) = b, \text{ oder:}$$

$$y^2 + 2my + m^2 + ay + am = b, \text{ oder:}$$

$$y^2 + (2m + a)y = b - am - m^2.$$

Soll nun diese Gleichung eine reine quadratische werden, so muß y wegfallen; dies findet dann statt, wenn sein Coefficient = Null wird, d. h. wenn $2m + a = 0$, oder $m = -\frac{a}{2}$ ist; also wenn $x = y - \frac{a}{2}$ ist.

Man setze daher $x = y - \frac{a}{2}$, so folgt:

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + a\left(y - \frac{a}{2}\right) = b,$$

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} + ay - \frac{a^2}{2} = b,$$

hieraus: $y^2 = \frac{a^2}{4} + b,$

und nun erhält man nach §. 1: $y = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)},$

daher: $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)},$ weil $x = -\frac{a}{2} + y$ ist.

Wenn man daher $x =$ einer neuen Unbekannten, (y) weniger dem halben Coefficienten der ersten Potenz setzt, so wird die gemischte Gleichung eine reine.

Z. B. 1) $x^2 + 6x = 160,\qquad x = y - \frac{6}{2} = y - 3,$

$$(y-3)^2 + 6(y-3) = 160,$$

$$y^2 - 6y + 9 + 6y - 18 = 160,$$

also: $y^2 = 169,\qquad y = \pm\sqrt{169} = \pm 13,$ folglich:

$x = \pm 13 - 3 = 10,$ oder $= -16.$

2) $x^2 - 3x = -2,$

$x = y - \frac{-3}{2} = y + \frac{3}{2}$ gesetzt, gibt:

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(y + \frac{3}{2}\right) = -2,$$

$$y^2 + 3y + \frac{9}{4} - 3y - \frac{9}{2} = -2,$$

oder $y^2 = \frac{1}{4},\qquad y = \pm\frac{1}{2},$

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = 1,$ oder $= 2.$

2te Auflösung.

Man bringe jede gegebene Gleichung auf die allgemeine Form $x^2 + ax = b$, und setze die Werthe, welche a und b in jedem einzelnen Fall haben, in den allgemeinen Werth von x; also in:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}.$$

Z. B. $x^2 + \frac{2}{3}x = 87,$

$a = \frac{2}{3}$, $b = 87$ gesetzt, gibt:

$$x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{9} + 87\right)} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{784}{9}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{28}{3},$$

oder $x = 9$, und $= -\frac{29}{3} = -9\frac{2}{3}$.

Anmerkung.

Die reine quadratische Gleichung läßt sich aus der gemischten dadurch bilden, daß man $a = 0$ setzt, wodurch dann $x^2 = b$ entsteht, und nach der allgemeinen Formel ist

$$x = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{(0 + b)}, \qquad x = \pm \sqrt{b}.$$

3te Auflösung.

$$x^2 + ax = b.$$

Wenn man aus der Gleichung die Quadratwurzel ziehen will, so zeigt sich, daß diese nicht aufgeht, sondern daß noch ein Glied $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ fehlt; man setze daher das Quadrat des halben Coefficienten des 2ten Gliedes auf beiden Seiten der Gleichung zu, und ziehe dann die Quadratwurzel aus.

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b,$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}.$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}.$$

(Dasselbe Resultat wie bei der ersten Auflösung.)

Z. B. $5x^2 + 14x = -9$, oder: $x^2 + \frac{14}{5}x = -\frac{9}{5}$,

$$x^2 + \frac{14}{5}x + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} - \frac{9}{5},$$

hieraus durch Ausziehung der Quadratwurzel:

$$x + \frac{7}{5} = \pm \sqrt{\frac{4}{25}}, \text{ oder } x = -\frac{7}{5} \pm \frac{2}{5};$$

also $x = -1$, oder $= -1\frac{4}{5}$.

4te Auflösung.

Die Unbekannte hat immer zwei Werthe, man setze nun diese allgemein $= m$ und $= n$; so ist:

$x = m$, $x = n$, also: $x - m = 0$, und $x - n = 0$, daher auch $(x - m)(x - n) = 0$. Hieraus:

$$x^2 - mx - nx + mn = 0, \text{ oder:}$$
$$x^2 - (m + n)x = - mn.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Form

$$x^2 + ax = b,$$

so zeigt sich, daß:

$$a = -(m + n), \text{ und } b = - mn,$$

Hieraus folgt: In jeder quadratischen Gleichung ist 1) der Coefficient der ersten Potenz = der Summe der zwei Werthe der Unbekannten mit umgekehrtem Zeichen, und 2) das bekannte Glied (Zahlenglied) ist = dem Produkte der zwei Werthe (Wurzeln) mit umgekehrtem Zeichen.

Es sei z. B. $x^2 + 12x = 540$.

Die 2 Werthe von x seien m und n, so ist:

$$12 = -(m + n) \text{ und: } 540 = - mn, \text{ oder:}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & m + n = -12 \\ \text{II)} & mn = -540 \end{array}\right\} \text{ Man erhebe nun I ins Quadrat, und ziehe II . 4 ab, so folgt:}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I}^2) & \left.\begin{array}{l} m^2 + 2mn + n^2 = 144 \\ 4mn = -2160 \end{array}\right\} \text{ subtrah.} \\ \text{II . 4} & \overline{m^2 - 2mn + n^2 = 2304}, \text{ die Wurzel ausgezogen,} \end{array}$$

gibt: III) $m - n = \pm 48$ und

I) $m + n = - 12$.

Addirt man beide Gleichungen, und subtrahirt man sie, so folgt: $2m = 36$, oder -60, und $2n = -60$ und 36, daher $m = 18$ oder -30, und $n = -30$ oder 18. Mithin ist $x = 18$ und $= -30$.

Anmerkung.

In manchen Fällen lassen sich die Gleichungen leicht dadurch auflösen, daß man untersucht, welche zwei Faktoren des Zahlengliedes zusammen = dem Coefficienten von x sind. Z. B.

$$x^2 - 5x = - 6,$$

die Faetoren von 6 sind 1, 2, 3, 6.

Die 2 Werthe von x müssen zusammen 5 geben, und beide müssen + sein, daher $x = 2$, und $x = 3$, weil ferner $2 . 3 = 6$ ist.

b) Aus der allgemeinen Ableitung der 4ten Auflösung folgt zugleich das Verfahren, wie man eine quadratische Gleichung

zu bilden habe, welche für x zwei bestimmte Werthe erhalten soll.

Z. B. x soll = 5, und = 2 werden; so muß die Gleichung:

$$x^2 - (5+2)x = -5 . 2 \text{ sein,}$$

also: $$x^2 - 7x = -10.$$

(Löst man diese Gleichung auf, so folgt: x = 5, oder 2.)

Es soll ferner eine Gleichung gebildet werden, in welcher $x = -a$ und $= \frac{1}{a}$ ist!

Setze $$x^2 - \left(-a + \frac{1}{a}\right)x = -\left(-a . \frac{1}{a}\right),$$

$$x^2 + \frac{a^2 - 1}{a} x = 1.$$

(Löset diese auf, so folgt: $x = -a$ und $\frac{1}{a}$!)

c) Es lassen sich manche Ausdrücke mit Anwendung des Satzes der 4ten Auflösung in Faktoren zerlegen.

Man bestimme nämlich die 2 Werthe m und n, indem man den Ausdruck = Null setzt und als quadratische Gleichung auflöst (wenn die Form des Ausdrucks dazu geeignet ist). Die 2 Faktoren sind dann $= x - m$, und $x - n$. Z. B.

$x^2 + 3x + 2$ soll in Faktoren zerlegt werden.

Setze $x^2 + 3x + 2 = 0$, so wird $x = -1$, und -2; daher $x + 1$, und $x + 2$, beide = Null; dieses sind daher die Faktoren.

(Machet die Probe durch Multiplication!)

Auf diese Art lassen sich auch manche Brüche reduciren; siehe Abschnitt II. §. 10. *f*. Z. B.

$$\frac{a^2 + 7ab + 6b^2}{a^2 - 2ab + 48b^2},$$

setze $a^2 + 7ab + 6b^2 = 0$, und drücke a in b aus, so folgt: $a = -b$, und $= -6b$, daher besteht der Zähler aus den Faktoren $a + b$ und $a + 6b$.

Ferner: $a^2 - 2ab + 48b^2 = 0$; so findet man die Faktoren $a + 6b$ und $a - 8b$, daher

$$\frac{(a+b)(a+6b)}{(a+6b)(a-8b)} = \frac{a+b}{a-8b}.$$

(Führet diese Rechnung vollständig aus!)

d) Die gebräuchlichste Auflösung ist die 3te, auch die 2te gibt kurze Rechnungen, man muß jedoch die Formel für x auswendig behalten. Es sollen nun noch einige Aufgaben über die gemischten quadratischen Gleichungen aufgelöst werden.

Aufgaben.

1) $$\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{8}x = -\frac{5}{24},$$

geordnet, gibt: $x^2 + \frac{21}{16}x = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16}$.

Wird nun (nach der dritten Methode) mit $\left(\frac{21}{32}\right)^2$ ergänzt, so folgt:

$$x^2 + \frac{21}{16}x + \left(\frac{21}{32}\right)^2 = \left(\frac{21}{32}\right)^2 - \frac{5}{16}.$$

also: $x + \frac{21}{32} = \pm\sqrt{\left(\frac{441}{1024} - \frac{5}{16}\right)} = \pm\sqrt{\frac{121}{1024}} = \pm\frac{11}{32}$

mithin: $x = -\frac{21}{32} \pm \frac{11}{32} = -1$, oder $= -\frac{5}{16}$.

Probe.

Setzt man diese 2 Werthe in die Gleichung (aber einzeln), so folgt:

$$\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{7}{8}\cdot -1 = \frac{2}{3} - \frac{7}{8} = -\frac{5}{24},$$

ebenso bei dem andern Werth; man erhält also die Zahl auf der rechten Seite der Gleichung.

2) $$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{3} = \frac{5x}{x-2},$$

$$3x(x-2) - 2(x+1)(x-2) = 15x(x+1),$$

ausmultiplicirt und geordnet; so folgt:

$$x^2 + \frac{19}{14}x = \frac{2}{7}.$$

Löst man diese Gleichung nach der zweiten Art auf, so ist in

$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}$, die Größe $a = \frac{19}{14}$,

und $b = \frac{2}{7}$, daher:

$$x = -\frac{19}{28} \pm \sqrt{\left(\frac{361}{784} + \frac{2}{7}\right)},$$

$$x = -\frac{19}{28} \pm \sqrt{\frac{585}{784}} = -\frac{19}{28} \pm \frac{\sqrt{585}}{28} = \frac{-19 \pm \sqrt{585}}{28}$$

$x = \frac{-19 \pm 24{,}187773}{28} = 0{,}18527\ldots$, und $-1{,}54242\ldots$

(Machet die Probe über jeden Werth!)

3) $x + 2\sqrt{x} = 120.$

Erste Auflösung. $2\sqrt{x} = 120 - x$, quadrirt, gibt:

$$4x = 14400 - 240x + x^2, \quad x^2 - 244x = -14400.$$

Hieraus: $x = 100$, oder $= 144$.

2te Auflösung. Setze $\sqrt{x} = y$, also $x = y^2$, so folgt:

$$y^2 + 2y = 120, \text{ hieraus } y = 10, \text{ oder } = -12,$$

daher $x = y^2 = 100$ oder $= 144$.

Anmerkungen.

1) Die zweite Auflösung gibt bei allen ähnlichen Aufgaben kürzere Rechnungen.

2) Setzt man 100 in die Gleichung statt x, so folgt:

$$100 + 2\sqrt{100} = 100 + 20 = 120.$$

Wird aber $x = 144$ genommen, so muß $\sqrt{144} = -12$ angenommen werden, damit die Summe $= 120$ wird,

$144 - 24 = 120$ (y oder $\sqrt{x}$ war aber auch wirklich $= -12$).

4) $\sqrt{x} - a = \sqrt{2(x - a^2)}$

$$x - 2a\sqrt{x} + a^2 = 2(x - a^2); \quad -2a\sqrt{x} = x - 3a^2,$$

$$4a^2x = x^2 - 6a^2x + 9a^4; \quad x^2 - 10a^2x = -9a^4.$$

Hieraus folgt: $x = 5a^2 \pm \sqrt{(25a^4 - 9a^4)}$,

$$x = 5a^2 \pm 4a^2 = 9a^2, \text{ oder } = a^2.$$

5) $x(x + 10) + (x - 9)^2 = x(x - 18) + 47.$

Wird diese Gleichung ausmultiplicirt und geordnet, so folgt:

$$x^2 + 10x = -34.$$

Hieraus (nach Auflös. 2): $x = -5 \pm \sqrt{25 - 34}$

$$x = -5 \pm 3\sqrt{-1}.$$

x hat daher 2 unmögliche Werthe.

Anmerkung.

Wenn in der allgemeinen Form $x^2 + ax = b$, die Größe b negativ und $> \frac{a^2}{4}$ wird, so ist x immer imaginär; denn die Formel für x, $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}$ erhält dann unter der Wurzel eine negative Größe.

6) Es lassen sich manche höhere Gleichungen wie quadratische behandeln; nämlich alle solche, in welchen die Unbekannte nur in 2 Potenzen vorkommt, von welchen der eine Exponent das Doppelte des andern ist. Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist:

$$x^{2n} + ax^n = b.$$

Setzt man nun $x^n = y$, so folgt: $x^{2n} = y^2$, daher:

$$y^2 + ay = b, \quad y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)},$$

und $x = \sqrt[n]{y}$, also

$$x = \sqrt[n]{\left[-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)}\right]}.$$

Beispiele.

1) $x^4 - 6x^2 = -8.$

$x^2 = y$, $x^4 = y^2$ gesetzt, so folgt: $y^2 - 6y = -8.$

$y = 4$ oder $= 2$, also $x = \sqrt{y} = \pm 2$, oder $\pm \sqrt{2}$.

(x hat hier 4 Werthe, in der Theorie der höheren Gleichungen wird auch allgemein bewiesen, daß jede Gleichung so viele Werthe für x gibt, als der höchste Exponent Einheiten hat; manche dieser Werthe sind jedoch auch gleich.)

2) Es sei ferner: $x^6 + 12x^3 = 13.$

Setze: $x^3 = y$, $x^6 = y^2$, so folgt:

$$y^2 + 12y = 13; \quad y = 1, \text{ oder } -13,$$

also: $x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{1} = 1$, oder $= \sqrt[3]{-13} = -\sqrt[3]{13}$.

Man kann diese Methode auch bei anderen Gleichungen anwenden. Z. B. es sei:

3) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} = -2;$

setze $\sqrt[4]{x} = y$, so ist $\sqrt{x} = y^2$, daher:

$y^2 - 3y = -2$, $y = 2$, oder $= 1$, also:

$\sqrt[4]{x} = 2$, $x = 2^4 = 16$, und ebenso $x = 1$.

§. 5. Aufgaben über gemischte quadratische Gleichungen.

1) $x^2 - 2x = -1.$ 2) $x^2 - 10x = 11$ (erste Art).

3) $x^2 + 5x = 104.$ 4) $x^2 - 7x = -12$ (2te Art).

5) $3x^2 - 5x = 250.$ 6) $5x^2 - 31x = 27$ (3te Art).

7) $(x + 3)(x - 7) = -30$ (4te Art).

8) $7x(x + 1) = 44 - x$ (nach der 2ten und 3ten Art).

9) $x^2 - 0{,}08x = -2.$ 10) $-\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{0{,}7} - 80 = 0.$

11) $\frac{2}{x} = \frac{3}{x^2} - 1.$ 12) $\frac{5 + x}{7} - \frac{4}{x + 1} = -\frac{1}{3}.$

13) $\frac{3+x}{4-x} - \frac{8+3x}{5x+2} = 5.$

14) $\frac{24x^3 - 22x^2 + 20x - 156}{24x^2 - 21x + 18} = x - \frac{1}{3}.$

15) $mx(mx+1) = 1.$ 16) $ax^2 + 2b^2x = b^2(a+2b).$

17) $(x+a)(x-b) = 2a(a-b).$

18) $\frac{a-b}{a+b} \cdot x - \frac{x^2}{a-b} = -\frac{4ab}{a-b}.$

19) $4\frac{5}{7}x^2 - 3x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 101{,}25x + \frac{3x^2}{7}.$

20) $(2x+3)^3 - 27 = 4x(x+18).$

21) $\frac{c^2x^2}{d^2} - 4\left(x - \frac{d^2}{c^2}\right) = 0.$

22) $20 + \sqrt{x} = x.$ 23) $3 + \sqrt{(5x-9)} = x + 2.$

24) $\sqrt{x} = m^2 + \sqrt{m^2(x - m^4)}.$

25) $x\sqrt{7} + 5\sqrt{3x} = \frac{22}{3}\sqrt{7}.$

26) $\sqrt{(x+21)} - \sqrt{x} = \sqrt{(5+x)}.$

27) $x^3 - 8 = 7(x-2).$

28) $x^4 + 2a^2x^2 = 3a^4.$ 29) $x^6 - 10x^3 = -16.$

30) $\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x} = -2.$ 31) $\sqrt[4]{x^{-3}} + \frac{3}{x}\sqrt{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{12}.$

32) Wie groß ist die Summe, und wie groß das Produkt der 2 Werthe von x in der Gleichung: $x^2 - 36x = 90.$

33) Wenn die eine Wurzel der Gleichung $x^2 - 35x = 36$, $x = -1$ ist, wie heißt die andere?

34) Zerleget folgende quadratische Gleichung in 2 Gleichungen vom ersten Grade: $x^2 - 12x = -20.$

35) Zerleget die Gleichung $x^2 - ax = 2a^2$ in die beiden zweitheiligen Faktoren, durch deren Multiplication sie entstanden ist.

36) Bildet eine Gleichung, deren Werthe für $x = 13$, und $= -4$ sind, auf 2 Arten!

37) Welche Gleichung hat die Wurzeln: $3 + \sqrt{-3}$ und $3 - \sqrt{-3}.$

38) Zerleget den Ausdruck $x^2 + 19x - 20$ in Faktoren!

39) Reduciret den Bruch: $\frac{a^2 - 7ab^2 + 10b^4}{4b^4 - a^2}.$

40) Reduciret den Bruch: $\frac{x^3 + 11x^2 + 28x}{ax + 4a + 7x + 28}.$

§. 6. Aufgaben, welche durch Anwendung der gemischten quadratischen Gleichungen zu lösen sind.

1) Die 2te Potenz einer Zahl und die 10fache Zahl sind zusammen = 56; wie heißt die Zahl?

2) Die 2te Potenz einer Zahl ist um 72 größer als die Zahl; wie heißt diese?

3) Das 10fache Quadrat einer Zahl übertrifft die Zahl um $\frac{3}{8}$; wie heißt diese?

4) Ein Rechteck ist um 30 Fuß länger als breit, der Inhalt desselben ist = 2800 Fuß; wie lang und wie breit ist es?

Anmerkung.

Hier ist nur der positive Werth der Seite zuläßig, obgleich der andere Werth (der negative), als bloße Zahl betrachtet, auch richtig ist; ebenso in den meisten der folgenden Aufgaben.

5) Wenn man die Seite eines Quadrats um a Fuß vergrößert, so wird der Inhalt doppelt so groß; wie groß ist die Seite?

6) Wenn die Seiten eines Quadrats um 20 Fuß größer werden, so entsteht ein 2tes Quadrat, welches um 175 Fuß größer ist als das doppelte erste Quadrat; wie groß ist die Seite desselben?

7) Wenn man eine Zahl um 8 vergrößert, so ist das Quadrat der Summe $33\frac{1}{3}$ mal so groß als die Zahl; wie heißt diese?

Anmerkung.

Man erhält hier 2 Zahlen, welche beide der Bedingung entsprechen.

8) Man soll ein Quadrat, dessen Seite = 20 Fuß ist, in ein Rechteck verwandeln, dessen Länge um 9 Fuß größer ist als die Breite. Wie groß wird die Länge und Breite dieses Rechtecks?

9) Zwei Quadrate, von welchen das eine in jeder Seite um 30 Fuß länger ist als das andere, haben zusammen 2900 Fuß Inhalt; wie groß sind ihre Seiten?

10) Der Umfang eines rechteckigen Feldes ist = 260 Fuß, sein Inhalt = 3000 Fuß; wie lang und wie breit ist dasselbe?

11) Von einer gewissen Waare kostet jedes Pfund 5 Kreuzer mehr als die Waare Pfunde wiegt, die ganze Waare wird für 8 fl. 20 kr. verkauft; wie viel Pfunde wiegt dieselbe und was kostet jedes Pfund?

12) 800 fl. Capital waren 1 Jahr länger verzinslich angelegt als die Procente zu welchen sie ausgeliehen waren betragen, und haben 160 fl. Zins gegeben; wie lange waren sie ausgeliehen und zu wie viel Procent?

13) Eine gewisse Anzahl Personen verzehrten bei einer Landpartie 24 fl., woran jede 1 fl. weniger zu bezahlen hat als der 4te Theil der Zahl der Personen beträgt; wie viele waren es und was hat jede Person zu bezahlen?

14) Wenn man eine gewisse Zahl um 30 vermehrt, die Summe durch 3 theilt, den Quotienten wieder um 6 vermehrt und dann mit 5 theilt; so ist das Quadrat des zuletzt erhaltenen Quotienten um 2 kleiner als die Zahl. Wie heißt diese?

15) Wenn man zu einer Zahl 5 addirt, die Summe ins Quadrat erhebt und dann wieder 80 addirt; so ist die letzte Summe = der 32fachen Zahl. Wie heißt diese Zahl?

16) Wenn man die Zahl 120 durch eine andere Zahl theilt, so ist der Quotient um 2 größer, als wenn man 120 durch eine Zahl theilt, welche um 2 größer ist als der vorhergehende Divisor. Wie heißt dieser?

17) Es kauft Jemand für 24 fl. Tuch zu einem Kleide; hätte er zwei Ellen weniger gebraucht, so hätte er für die gleiche Summe ein feineres Tuch, von welchem die Elle 1 fl. mehr kostet, nehmen können. Wie viele Ellen hat er gekauft, und wie viel kostete die Elle?

18) Es sollen 30 fl. unter eine gewisse Anzahl Personen vertheilt werden; wären es 5 Personen weniger, so empfienge jede 1 fl. mehr als jetzt. Wie viele Personen sind es?

19) Ein Kaufmann gibt für 90 fl. eine bestimmte Anzahl Pfunde von einer Waare ab; später wird jedes Pfund um 6 kr. theuerer, und er gibt alsdann für dasselbe Geld 10 Pfunde weniger als vorher. Wie hoch war anfangs der Preis eines Pfundes?

20) In einer Gemeinde wurden früher monatlich 100 fl. unter die Armen vertheilt; da aber die Zahl derselben um 40 zunahm, so wurden für jeden Monat 120 fl. zur Vertheilung bestimmt. Wenn nun jetzt jeder dennoch 5 kr. weniger bekommt als früher; wie viele Arme wurden früher und wie viele werden jetzt unterstützt; und wie viel erhielt vorher jeder, und wie viel jetzt?

21) Wenn man eine gewisse Zahl um 1 vermehrt und auch um 1 vermindert, und mit der Summe und dem Rest einzeln in die anfängliche Zahl theilt; so sind die hierdurch entstehenden Quotienten um $\frac{3}{4}$ unterschieden. Wie heißt die Zahl?

22) Zwei Rechtecke haben gleichen Inhalt, nämlich jedes 100 Fuß. Das erste ist um 5 Fuß länger als das andere, dieses aber ist um 1 Fuß breiter als das erste; wie lang und wie breit sind beide?

23) Um die Tiefe eines Bronnens zu finden, ließ man einen Stein in denselben fallen, und nach 5 Secunden hörte man den Schall des auffallenden Steines. Wenn man nun sowohl den im §. 3 Aufgabe 8 gegebenen Satz über die Fallhöhe, als auch den Umstand berücksichtigt, daß der Schall in jeder Secunde 1107 neubadische Fuß zurücklegt; wie tief ist der Bronnen?

24) Wenn man von einer Zahl einzeln die Zahlen 15 und 12 und vom Quadrat der Zahl, die Zahlen 282 und 274 abzieht; so bilden die Reste eine geometrische Proportion. Wie heißt diese Zahl, und welches ist die Proportion?

25) Die Differenz der 3ten Potenzen zweier Zahlen, von welchen die eine um 2 größer ist als die andere, beträgt 728; welches sind die Zahlen?

26) Zwei Würfel haben zusammen 351 Cubikzoll Inhalt, die Summe einer Seite des ersten und einer Seite des zweiten beträgt 9 Zoll; wie groß sind die Seiten und wie groß die Würfel?

27) Welche Zahl übertrifft ihre Quadratwurzel um 342?

28) Ein Rechteck von 120 Fuß Länge und 80 Fuß Breite soll durch eine gleiche Verlängerung aller Seiten verdoppelt werden; um wie viel muß jede Seite größer werden?

Wenn J den Cubikinhalt eines abgekürzten kreisförmigen Kegels bezeichnet, dessen Halbmesser = R und r, und dessen Höhe (senkrechter Abstand der 2 parallelen Kreise) = h gesetzt wird; so ist:

$$J = \frac{3,14}{3} \cdot h(R^2 + Rr + r^2).$$

29) Wenn nun der Inhalt eines abgekürzten Kegels = **3080,34** Cubikzoll, seine Höhe = **27** Zoll, und der eine Halbmesser um 2 Zoll größer ist als der andere; wie groß sind die beiden Halbmesser?

30) Das 12fache einer Zahl ist um 32 größer als die Quadratwurzel aus der Zahl; wie heißt diese?

31) Man soll eine Zahl finden, welche um 20 kleiner ist als die doppelte Quadratwurzel aus der Zahl.

32) Ein Eilwagen fährt von der Stadt **N** Morgens um 5 Uhr nach der Stadt **P** ab, ein anderer geht denselben Tag Morgens um 9 Uhr von **P** nach **N** ab. Als sie sich begegnen, hatte der erste eine Meile mehr zurückgelegt als der 2te, und wenn jeder mit gleicher Geschwindigkeit wie bisher fortfährt; so wird der erste die Stadt **P** in 15 Stunden, und der 2te die Stadt **N** in 12 Stunden 48 Minuten erreichen. Wie weit ist der Ort des Zusammentreffens von **N** entfernt; wie groß ist die Entfernung der Städte **N** und **P**, und wie groß ist endlich die Geschwindigkeit der beiden Eilwägen?

33) Eine bestimmte Arbeit wird von 2 Taglöhnern, von welchen der zweite 2 Tage später anfängt als der erste, in 10 Tagen vollendet. Wenn man dem ersten allein die Arbeit übertragen hätte, so wäre dieselbe 4 Tage später fertig geworden, als wenn der zweite allein dieselbe ausgeführt hätte; wie lange braucht jeder einzeln, um die Arbeit zu vollenden?

34) **A** und **B** betheiligen sich durch verschiedene Einlagen, welche zusammen 1000 fl. betragen, bei einer Unternehmung. **A** ließ sein Geld 10 Monate lang in dem Geschäfte und **B** das seinige ein Jahr lang; der erste erhielt nach Beendigung des Geschäftes 900 fl. als Einlage und Gewinn, und der 2te bekam 640 fl.; wie viel hat jeder eingelegt, und wie viel hat jeder gewonnen?

35) Wenn man zu einer Zahl **1543752** addirt, und aus der Summe die Cubikwurzel zieht, so ist diese um 18 größer als die Cubikwurzel aus der Zahl; wie heißt diese?

36) Wenn man von einer Zahl **10981** abzieht, und zu derselben Zahl auch **11347** addirt, so ist die Cubikwurzel aus der Summe um 2 größer als die aus dem Reste; welche Zahl hat diese Eigenschaft?

37) Ein Capitalist leiht sein Vermögen von 50000 fl. auf Zinsen aus, am Ende des ersten Jahres nimmt er von den Zinsen 1200 fl. zu seinem Unterhalte weg, und legt den Rest der Zinsen noch um ein Procent höher an als das Capital. Nach einem weiteren Jahre findet er, daß sein Vermögen seit 2 Jahren um 2840 fl. zugenommen hat; zu welchen Procenten waren das Capital und der Zinsrest angelegt?

§. 7. Quadratische Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Es sind hier im Allgemeinen dieselben Methoden anwendbar, welche bei den Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten gezeigt wurden.

Wenn die eine der gegebenen Gleichungen eine Gleichung des ersten Grades ist; so suche man aus dieser den Werth der einen Unbekannten, und setze ihn dann in die andere Gleichung.

In manchen Fällen läßt sich die Auflösung dadurch abkürzen, daß man die eine Gleichung potenzirt und dann mit der anderen verbindet, um eine kürzere Gleichung zu erhalten (etwa für die Summe, die Differenz, oder das Produkt der 2 Unbekannten).

Wenn beide Gleichungen vom 2ten Grade sind, so wird die Endgleichung im Allgemeinen eine höhere (gewöhnlich vom 4ten Grade); nur in einzelnen Fällen ist eine Reduction auf den 2ten Grad möglich.

Es sollen nun einige Aufgaben gelöst werden, an welchen wir die verschiedenen Methoden kennen lernen werden.

1) I) $x + y = 5$
II) $xy = 6$

Erste Auflösung, durch Substitution.

Aus **I**, $y = 5 - x$, in **II** gesetzt, gibt: $x(5 - x) = 6$.

Hieraus: $x^2 - 5x = -6$, $x = 3$, oder $= 2$, daher $y = 2$, oder 3.

2te Auflösnng, durch Vergleichung.

Aus **I**, $x = 5 - y$; aus **II**, $x = \frac{6}{y}$, daher:

$$5 - y = \frac{6}{y},\quad y^2 - 5y = -6 \text{ u. s. w.}$$

3te Auflösung, durch die Subtractionsmethode.

I . y) $xy + y^2 = 5y$, hievon II abgezogen,

gibt: $y^2 = 5y - 6$ u. s. w.

4te Auflösung, durch Potenzerhebung.

$$\left.\begin{array}{ll} I^2) & x^2 + 2xy + y^2 = 25 \\ II . 4) & \quad 4xy \quad = 24 \end{array}\right\} \text{subtrah.}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1.$$

Durch Ausziehung der Quadratwurzel erhält man nun:

$$III) \quad x - y = \pm 1;$$

diese mit I verbunden u. s. w., gibt x und y.

2) $$\left.\begin{array}{ll} I) & x^2 + y^2 = 521 \\ II) & x + y = 31 \end{array}\right\}$$

Erste Auflösung.

Aus II, y in I gesetzt u. s. w.

2te Auflösung.

Erhebet die Gleichung II ins Quadrat und subtrahiret dann die Gleichung I, so folgt:

$$III) \quad 2xy = 440.$$

Diese von I subtrahirt, gibt: $x^2 - 2xy + y^2 = 81$;

hieraus: $x - y = \pm 9$ (IV).

II + IV, und II — IV, gibt nun die Werthe 20 und 11.

(Führet beide Auflösungen vollständig aus!)

3) $$\left.\begin{array}{ll} I) & x^2 + xy + y^2 = 43 \\ II) & x - y \quad = 5 \end{array}\right\}$$

Erste Auflösung. $x = 5 + y$ in I gesetzt u. s. w.

2te Auflösung. II²) $x^2 - 2xy + y^2 = 25$;

von I abgezogen, so folgt: $3xy = 18$, $xy = 6$ (III).

II² + 4 . III) gibt: $x^2 + 2xy + y^2 = 49$, $x + y = \pm 7$ (IV).

Aus IV und II, x und y; so folgt: $x = 6$, oder -1, und $y = 1$, oder -6.

4) $$\left.\begin{array}{ll} I) & x^2 + y^2 = 400 \\ II) & \quad xy \quad = 192 \end{array}\right\}$$

Erste Auflösung.

Aus II x in I gesetzt, gibt eine Gleichung vom 4ten Grade, welche sich aber als eine quadratische auflösen läßt. Suchet x und y!

Andere Auflösung.

Nehmet die Gleichung II doppelt und addiret sie zu I, subtrahiret sie auch von I; so folgt eine Gleichung für $x + y$ und eine für $x - y$ u. s. w. Man findet $x = \pm 16$, $y = \pm 12$.

5) $$\left.\begin{array}{l} \text{I)}\ x^4 + y^4 = 65 \\ \text{II)}\ x - y = 2 \end{array}\right\}$$

$$\text{II}^4)\ x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = 16,$$

diese ziehet von I ab, so folgt:

$$4x^3y - 6x^2y^2 + 4xy^3 = 49;$$

hieraus durch Division mit $4xy$:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - \frac{3}{2}xy + y^2 = \frac{49}{4xy} \\ \text{II}^2)\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{array}\right\}\ \text{subtrahirt:}$$

$$\frac{xy}{2} = \frac{49}{4xy} - 4, \text{ woraus:}$$

$$2(xy)^2 + 16xy = 49, \text{ oder } (xy)^2 + 8(xy) = \frac{49}{2}, \text{ folgt.}$$

Man betrachte nun xy als unbekannte Größe, so folgt:

$$\text{III)}\ xy = -4 \pm \frac{9}{2}\sqrt{2} = 2{,}363\ldots, \text{ oder } -10{,}363\ldots$$

III und II verbunden u. s. w., gibt:

$$x = 2{,}833\ldots., \quad y = 0{,}833\ldots. \text{ u. s. w.}$$

6) $$\left.\begin{array}{l} \text{I)}\ x^5 + y^5 = 33 \\ \text{II)}\ x + y = 3 \end{array}\right\}$$

II^5 durch Multiplication von $\text{II}^2 \times \text{II}^3$ gebildet, gibt:

$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = 243.$$

I subtrahirt, und dann mit $5xy$ getheilt, gibt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{III)}\ x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = \frac{42}{xy} \\ \text{I}^3)\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27 \end{array}\right\}\ \text{III) subtrahirt von I}^3\text{).}$$

$$x^2y + xy^2 = 27 - \frac{42}{xy}, \text{ oder:}$$

$$xy(x + y) = 27 - \frac{42}{xy}, \text{ da aber } x + y = 3 \text{ ist,}$$

so ist: $xy \cdot 3 = 27 - \frac{42}{xy}$; oder $(xy)^2 - 9(xy) = -14$.

Hieraus $xy = 7$, oder $= 2$; diese mit II verbunden u. s. w.

7) $\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & x + y = axy \\ \text{II)} & x^2 + y^2 + x + y = b \end{array}\right\}$

Erste Auflösung.

$I^2 - II$ gebildet, so erhält man:

$$2xy - (x + y) = a^2(xy)^2 - b.$$

Aus I) $x + y$ in diese Gleichung gesetzt, gibt:

$$2xy - axy = a^2(xy)^2 - b.$$

Hieraus xy gesucht und in I gesetzt, gibt $x + y$ u. s. w.

(Löset diese Gleichungen selbst auf!)

Andere Auflösung.

Setze $x + y = z$ und $xy = u$, so folgt aus den 2 gegebenen Gleichungen:

$$\text{I)}\ z = a \cdot u, \qquad \text{II)}\ x^2 + y^2 + z = b.$$

Nun ist aber $\left.\begin{array}{l} z^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ 2u = 2xy \end{array}\right\}$ subtrahirt:

$z^2 - 2u = x^2 + y^2$ in Gleichung II gesetzt, gibt:

III) $z^2 - 2u + z = b$, aus I ist

$u = \frac{z}{a}$, in III gesetzt u. s. w., gibt z und u, und nun (nach der ersten Aufgabe) auch x und y.

8) $\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & x + y + z = 24 \\ \text{II)} & x^2 + y^2 + z^2 = 200 \\ \text{III)} & xy - z^2 = 44 \end{array}\right\}$

Erste Auflösung.

Aus I z in II und III gesetzt, gibt:

$$x^2 + y^2 + (24 - x - y)^2 = 200, \text{ und } xy - (24 - x - y)^2 = 44.$$

Diese geben ausgerechnet und geordnet:

$$x^2 + y^2 + xy - 24(x + y) = -188 \quad \text{(IV) und:}$$
$$x^2 + y^2 + xy - 48(x + y) = -620 \quad \text{(V)}$$

IV — V) $24(x + y) = 432$, oder: $x + y = 18$ (VI).

In I gesetzt, gibt $z = 6$, in III gesetzt, gibt:

VII) $xy = 80$, aus VI und VII x und y, $= 10$ und 8 u. s. w.

2te Auflösung.

$$\text{II} + \text{III})\quad x^2 + xy + y^2 = 244 \quad (\text{IV}).$$

Aus I) $x + y = 24 - z$, oder: $x^2 + 2xy + y^2 = (24 - z)^2$ hievon IV abgezogen: $xy = (24 - z)^2 - 244$; statt xy setze aus III) $44 + z^2$; so folgt:

$$44 + z^2 = (24 - z)^2 - 244, \text{ woraus } z = 6,$$

folglich aus I. $x + y = 18$, und aus III, $xy = 80$ u. s. w.

Man findet $x = 10$ und $y = 8$ u. s. w.

3te Auflösung.

Bilde $\text{II} + \text{III} . 2$, so folgt:

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 288, \text{ oder } (x + y)^2 = 288 + z^2.$$

Aus I ist aber $(x + y)^2 = (24 - z)^2$, (aus I), daher:

$$288 + z^2 = (24 - z)^2, \text{ hieraus } z \text{ u. s. w.}$$

9)
$$\left.\begin{aligned} \text{I})\quad & x^2 + y^2 = 25 \\ \text{II})\quad & xz \quad\;\; = 15 \\ \text{III})\quad & z^2 - y^2 = 9 \end{aligned}\right\}$$

$\text{I} + \text{III}$ gibt $x^2 + z^2 = 34$ (IV), IV und II zusammengenommen wie in Aufgabe 4 u. s. w.

Man findet $z = \pm 5$, $x = \pm 3$ und $y = \pm 4$.

§. 8. Aufgaben über quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

1) I) $x^2 + y^2 = 221$, und II) $x^2 - y^2 = 21$.
2) I) $x^2 + y^2 = 25$, „ II) $x - y = 1$.
3) I) $x - y = 8$, „ II) $xy = 9$.
4) I) $x^2 - y^2 = 99$, „ II) $x + y = 11$.
5) I) $ax - by = 2$, „ II) $a^2x^2 = 7 + 2b^2y^2$.
6) I) $x + y = 14$, „ II) $x^3 + y^3 = 1064$.
7) I) $x - y = 14$, „ II) $x^3 - y^3 = 7784$.
8) I) $x^4 + y^4 = 10001$, „ II) $x + y = 11$.
9) I) $x^2 + y^2 + x - y = 112$, II) $x^2 - y^2 + x + y = 108$.
10) I) $xy = a$, II) $x^2 - y^2 = 2b$, durch Substitution!
11) I) $x^2 + xy + y^2 = 109$, II) $x^2 - y^2 = 24$.
12) I) $x^2 + xy = a$, II) $xy + y^2 = b$.
13) I) $16x^2 = 25y^2$, II) $x^3 - \left(\frac{5}{4}\right)^3 y^3 + x^2 - y = 92$.

14) I) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$, und II) $xy = b^2$.

15) I) $x + y = 34$, „ II) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$.

16) I) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, „ II) $x^2 + y^2 = 97$.

17) I) $x^3 - y^3 = 7(x - y)^3$, II) $xy = 2$.

18) I) $xy = 8$, II) $yz = 2$, III) $xz = 4$.

19) I) $x(y+z) = 5$, II) $y(x+z) = 8$, III) $z(x+y) = 9$.

20) I) $x^2 + y^2 + z^2 = 365$, II) $xy = \frac{z^2}{2} + 38$.
III) $x^2y + xy^2 = 2310$.

21) I) $\frac{x^2 + y^2}{xyz} = \frac{5}{12}$, II) $\frac{x^2 + z^2}{xyz} = \frac{5}{6}$, III) $\frac{y^2 + z^2}{xyz} = \frac{13}{12}$.

22) I) $xz = y^2$, II) $xyz = a^3$, III) $x + y + z = b$.

23) I) $xyz = 150$, II) $xyu = 200$, III) $xzu = 120$, IV) $yzu = 60$.

24) I) $x + y + z = 13$, III) $xy + xz + yz = 54$
II) $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 62$, IV) $xyu = 24$

§. 9. Aufgaben, welche durch quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten gelöst werden können.

Löset folgende Aufgaben mit Hülfe von zwei Unbekannten (§. 6):

1) Nro. 10. (Länge x, Breite y, Inhalt xy.)
2) „ 22. (Länge des ersten = x, Breite des ersten = y.)
3) „ 25. (Die 2 Zahlen seien = x und = y.)
4) „ 26. (Die 2 Seiten „ „ „ „)
5) „ 34, (A gibt x, B gibt y fl.)
6) „ 36. (Setze $x - 10981 = y^3$, und $x + 11347 = z^3$.)

7) Man soll 2 Zahlen finden, welche zusammen = 28 sind, und deren Cubikwurzeln um 2 differiren.

8) Zwei Zahlen verhalten sich wie 11 : 25 und die Summe ihrer Quadrate ist = 60426; wie heißen dieselben?

9) Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches 3 addirt, so wird der Bruch um $\frac{1}{12}$ größer; wird aber vom Zähler und Nenner 2 abgezogen, so wird der Bruch um $\frac{1}{12}$ kleiner. Wie heißt derselbe?

10) Die Zahl 30 soll in 2 solche Theile zerlegt werden, daß die Summe der Quadrate derselben = 468 ist.

11) Nach Sätzen der Geometrie ist das Quadrat der größten Seite eines rechtwinkligen Dreiecks = der Summe der Quadrate der zwei anderen Seiten. Wenn nun die 2 kleineren Seiten zusammen = **105** und die größte Seite = **75** ist; wie groß sind jene?

12) Die 2 kleineren Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie **12 : 5**, die Summe der Quadrate aller 3 Seiten ist = **1352**; wie groß sind dieselben?

13) **N** kauft bei einem Händler eine bestimmte Anzahl Pfunde von einer Waare und bezahlt dafür 17 fl. 30 kr. Nach einiger Zeit kauft er wieder 6 ℔ mehr als das Doppelte seines früheren Einkaufs und erhält jedes Pfund um 1 Krz. billiger als früher. Wenn er nun dafür 36 fl. bezahlen muß; wie viel Pfunde kaufte er in beiden Fällen, und zu welchen Preisen das Pfund?

14) Ein Rechteck hat 3000 Quadratfuß Inhalt. Wenn man seine Länge und Breite jede um die halbe Breite vergrößert, so wird der Inhalt = **5175** Fuß; wie lang und wie breit ist dasselbe?

15) Eine stetige geometrische Proportion zu finden, von welcher die Summe aller 4 Glieder = **64**, und die Summe der Quadrate der 2 äußeren Glieder = **706** ist.

16) Die Summe aller 4 Glieder einer geometrischen Proportion ist = **56**, das Produkt der inneren Glieder (folglich auch das Produkt der äußeren) ist = **84**, und die Summe der Quadrate aller Glieder ist = **1250**; wie heißt die Proportion?

17) Es nimmt Jemand zwei Capitalien auf, welche zu verschiedenen Procenten verzinst werden müssen. Das erste Capital ist doppelt so groß als das zweite, er hat dasselbe aber um $\frac{1}{2}$ Procent niedriger zu verzinsen als das zweite; die Zinsen des ersten betragen 280 fl. mehr als die des zweiten Capitals. Wenn er die Capitalien aber beide zu demselben Zinsfuß erhalten hätte, zu welchem er das erste erhielt; so hätte er im Ganzen jährlich 960 fl. Zinsen bezahlen müssen. Wie groß sind die 2 Capitalien, und zu wie viel Procenten muß er sie verzinsen?

18) Ein Capital hat in einigen Jahren, zu bestimmten Procenten ausgeliehen, 200 fl. Zins getragen. Wäre dasselbe Capital um ein Procent höher und ein Jahr länger ausgeliehen worden, so hätte man 300 fl. Zins erhalten; wäre aber dasselbe Capital ein Jahr weniger und zu einem Procent niedriger angelegt worden, so hätte der Zins nur 120 fl. betragen. Wie groß ist das Capital; zu welchen Procenten, und wie lange war es ausgeliehen?

19) Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist = dem halben Produkt der 2 kleineren Seiten (Katheten). Wenn nun der Umfang eines solchen Dreiecks = **a**, und der Inhalt = **b** ist; wie groß sind die 3 Seiten (mit Rücksicht auf den in Aufg. 11 gegebenen Satz)?

20) Die Summe aller Ziffern einer vierzifferigen Zahl ist = **19**, die dreifache Summe der 2 ersten Ziffern ist um 3 größer als das Produkt der 2 letzten, die 2te Ziffer ist um 2 kleiner als die Summe

der 3ten und 4ten Ziffer. Wenn man ferner zu der gesuchten Zahl 4635 addirt, so erhält man eine andere, welche die nämlichen Ziffern hat, wie die gesuchte, jedoch in umgekehrter Ordnung. Wie heißt diese Zahl?

E. Unbestimmte Gleichungen.

§. 1. Allgemeine Bemerkungen.

Wenn man, zur Auffindung mehrerer unbekannten Größen, eine kleinere Anzahl von Gleichungen hat als Unbekannte vorhanden sind; so ist die Aufgabe eine unbestimmte oder diophantische. (Siehe C. §. 1.)

Diese unbestimmten Gleichungen können, wie die bestimmten, von beliebigen Graden sein; wir werden hier die vom ersten und 2ten Grade betrachten.

Es seien z. B. 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so lassen sich diese auf eine Gleichung mit 2 Unbekannten bringen; oder allgemein, $n-1$ Gleichungen mit n Unbekannten können auf eine Gleichung mit zwei Unbekannten zurückgeführt werden. Es sei z. B.

$$\text{I)}\quad 2x + y + z = 18$$

$$\text{II)}\quad 3x - y + 5z = 34$$

I + II gibt: $5x + 6z = 52$, hieraus $x = \frac{52 - 6z}{5}$ (III),

diesen Werth in I gesetzt, gibt alsdann $y = \frac{7z - 14}{5}$ (IV).

Nimmt man nun für z verschiedene Werthe an, so erhält man aus III und IV für jeden einzelnen Werth von z einen zugehörigen Werth von x, und ebenso einen Werth für y; z. B. Es sei:

$z = 0$, so wird $x = \frac{52}{5} = 10\frac{2}{5}$ und $y = -\frac{14}{5} = -2\frac{4}{5}$.

$z = 1$, „ „ $x = \frac{46}{5} = 9\frac{1}{5}$ „ $y = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$.

$z = 2$, „ „ $x = \frac{40}{5} = 8$ „ $y = 0$, u. s. w.

Man erhält auf diese Weise eine unendliche Anzahl von Werthen für x, y und z.

Wenn nun aber noch bestimmt wäre, daß x, y und z z. B. ganze Zahlen, oder positive Werthe, oder solche Zahlen sein sollen, welche einzifferig, zweizifferig u. s. w. sind; dann wird die Zahl der verschiedenen brauchbaren Werthe kleiner, ja die Aufgabe kann durch durch die Angabe solcher Nebenbedingungen oft eine bestimmte werden.

§. 2. Von den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit 2 Unbekannten.

Die Auflösung solcher Gleichungen soll hier an einigen Beispielen gezeigt werden.

1) Es sei

$$3x + 7y = 138$$

gegeben, mit der Bedingung, daß x und y ganze positive Zahlen sein sollen; so erhält man:

$$3x = 138 - 7y\,, \qquad x = \frac{138 - 7y}{3} = 46 - \frac{7y}{3}.$$

Soll nun x eine ganze Zahl werden, so muß $\frac{y}{3}$ ebenfalls eine ganze Zahl sein, daher kann y nur = 3, 6, 9, 12 u. s. w. genommen werden, und man erhält:

für	$y = 3$,	$x = 39$	und für	$y = 12$,	$x = 18$
„	$y = 6$,	$x = 32$	„ „	$y = 15$,	$x = 11$
„	$y = 9$,	$x = 25$	„ „	$y = 18$,	$x = 4$.

x kann daher = 39, 32, 25, 18, 11 und 4 sein und y = 3, 6, 9, 12, 15 und 18, andere Werthe sind nicht brauchbar (weil keine andere positive ganze Zahlen möglich sind).

Anmerkungen.

1) Wäre z. B. die Bedingung gestellt worden, daß x und y zweizifferige positive Zahlen sein sollen; so erhielte man nur die 2 Werthe $x = 18$, $y = 12$, und $x = 11$, $y = 15$.

2) Die Werthe von y bilden eine arithmetische Reihe, deren Differenz = 3, und die Werthe von x eine solche Reihe, deren Differenz = − 7 ist.

2) Es sollen zwei ganze positive Zahlen gefunden werden, welche so beschaffen sind, daß das 5fache der ersten um 30 größer ist als das 7fache der zweiten.

Erste Auflösung.

Die erste Zahl sei = x, die zweite = y, so folgt:

$$5x = 7y + 30,$$

hieraus $$x = \frac{7y}{5} + 6.$$

Da nun x eine ganze Zahl sein soll, so muß y durch 5 theilbar sein, daher kann y nur $= 5, 10, 15, 20 \ldots$ sein; setze daher:

$y = 5$, so ist $x = 13$,	ferner $y = 10$, $x = 20$,
$y = 15$, „ „ $x = 27$,	„ $y = 20$, $x = 34$,
$y = 25$, „ „ $x = 41$,	„ $y = 30$, $x = 48$ u. s. w.

x wächst daher in einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $= 13$, und deren Differenz $= 7$ ist, wenn y immer um 5 zunimmt.

Der $n$te Werth von y wird $= 5n$ und der zugehörige Werth von $x = 13 + (n-1)7 = 7n + 6$ sein.

2te Auflösung.

$$5x = 7y + 30\,, \qquad x = \frac{7}{5}y + 6 = y + 6 + \frac{2y}{5}\,,$$

$\frac{2}{5}y$ muß eine ganze Zahl sein; es sei diese $= m$, so ist

$$y = \frac{5}{2}m = 2m + \frac{m}{2}\,.$$

Wenn nun y eine ganze Zahl sein soll, so muß auch $\frac{m}{2}$ eine ganze Zahl sein; diese sei $= n$, so ist $m = 2n$, daher

$$y = 2 \,.\, 2n + n = 5n \text{ und:}$$

$$x = y + 6 + \frac{2}{5}y = 5n + 6 + 2n = 7n + 6.$$

Man erhält hiernach für x und y die zwei Zahlformen

$$x = 6 + 7n\,, \text{ und } y = 5n\,,$$

wie oben, und für jeden Werth von n ergibt sich ein Werth für x und y; z. B. $n = 1$, gibt $x = 13$, $y = 5$ u. s. w.

Anmerkung.

Um die Richtigkeit dieser Resultate zu prüfen, untersuche, ob die 5fache erste Zahl um 30 größer ist als die 7fache zugehörige zweite Zahl; z. B.

$$5 \,.\, 13 = 65, \text{ und } 7 \,.\, 5 = 35, \quad 65 = 35 + 30.$$

3) Welche Zahlen lassen durch 12 getheilt 1, und durch 17 getheilt 5 zum Rest?

Auflösung.

Der erste Quotient sei $= x$, so ist die Zahl $= 12x + 1$; der 2te Quotient sei $= y$, so ist die Zahl auch $= 17y + 5$; mithin muß:

$$12x + 1 = 17y + 5 \text{ sein.}$$

Man findet hieraus $x = \frac{17y + 4}{12} = y + \frac{5y + 4}{12}$.

Sollen nun x und y ganze Zahlen sein, so muß auch $\frac{5y+4}{12}$ eine ganze Zahl sein; es sei diese $= m$, so ist $5y + 4 = 12m$, $y = 2m + \frac{2m-4}{5}$; $\frac{2m-4}{5}$ muß nun gleichfalls = einer ganzen Zahl sein, z. B. $= n$, also $2m - 4 = 5n$, $m = 2n + 2 + \frac{n}{2}$.

Wird nun noch $\frac{n}{2} = p$ gesetzt, so ist:

$n = 2p$, und ferner, durch Substitution in die früheren Werthe:

$$m = 2 . 2p + 2 + p = 5p + 2, \text{ daher:}$$

$$y = 2m + n = 10p + 4 + 2p = 12p + 4, \text{ folglich:}$$

$$x = y + m = 12p + 4 + 5p + 2 = 17p + 6.$$

Die gesuchten Zahlen haben daher die Form:

$$12x + 1 = 12(17p + 6) + 1,$$

oder $= 204p + 73$,

oder $= 17y + 5 = 17(12p + 4) + 5 = 204p + 73$, wie vorhin.

Wird nun $p = 0$, $= 1$, $= 2$, u. s. w. gesetzt, so folgen die Zahlen **73**, **277**, 481, ...

(Diese bilden eine arithmetische Progression, deren Differenz = 204 ist.) Prüfet die Zahlen, ob sie den 2 Bedingungen in Bezug auf die Quotienten und Reste entsprechen!

4) Es will Jemand eine Schuld von 109 fl. in Kronenthalern und preussischen Thalern bezahlen; wie viele muß er von jeder Geldsorte nehmen?

Auflösung. Er nehme x Kronenthaler und y preussische Thaler; so erhält man, wenn alles in Gulden ausgedrückt wird, die Gleichung:

$$\frac{27x}{10} + \frac{7y}{4} = 109, \text{ oder } 54x + 35y = 2180.$$

Hieraus $x = 40 + \frac{20 - 35y}{54}$, setze nun wieder:

$\frac{20 - 35y}{54} = m$, so ist $y = \frac{-54m + 20}{35} = -m + \frac{20 - 19m}{35}$

$\frac{20 - 19m}{35} = n$, " " $m = \frac{-35n + 20}{19} = -n + 1 + \frac{1 - 16n}{19}$

$\frac{1 - 16n}{19} = p$, " " $n = \frac{-19p + 1}{16} = -p + \frac{1 - 3p}{16}$

$\frac{1-3p}{16} = q$, so ist $p = \frac{-16q+1}{3} = -5q + \frac{1-q}{3}$

$\frac{1-q}{3} = r$, „ „ $q = 1 - 3r$.

Werden nun diese Werthe rückwärts substituirt, so folgt:

$p = -5q + r = 16r - 5$,

$n = -p + q = -16r + 5 + 1 - 3r = 6 - 19r$,

$m = -n + 1 + p = -6 + 19r + 1 + 16r - 5 = 35r - 10$,

mithin $y = -m + n = -35r + 10 + 6 - 19r = 16 - 54r$,

und $x = 40 + m = 40 + 35r - 10 = 30 + 35r$.

Hier kann für r nur der Werth 0 genommen werden, indem sonst y negativ würde; und man erhält daher $y = 16$ und $x = 30$, d. h. 30 Kronenthaler und 16 preuss. Thlr. müssen genommen werden, eine andere Zahlungsart in diesen Geldsorten ist nicht möglich.

5) Der Bruch $\frac{13}{20}$ soll in 2 Brüche zerlegt werden, deren Nenner = 12, und = 30 sind, wie heißen diese zwei Brüche?

Auflösung.

Die 2 Zähler seien = x, und = y; so ist $\frac{x}{12} + \frac{y}{30} = \frac{13}{20}$.

hieraus $5x + 2y = 39$;

also $y = 19 - 2x + \frac{1-x}{2}$, $\frac{1-x}{2} = n$, $x = 1 - 2n$,

daher $y = 19 - 2 + 4n + n = 5n + 17$.

Setzt man nun $n = 0$, so folgt: $x = 1$, $y = 17$, daher sind die 2 Brüche $\frac{1}{12}$ und $\frac{17}{30}$;

$n = 1$ gäbe ein negatives x; man nehme ferner $n = -1$, so folgt: $x = 3$, $y = 12$, also $\frac{3}{12}$ und $\frac{12}{30}$,

$n = -2$, gibt $x = 5$ und $y = 7$, also $\frac{5}{12}$ und $\frac{7}{30}$,

$n = -3$, „ $x = 7$ „ $y = 2$, „ $\frac{7}{12}$ „ $\frac{2}{30}$,

$n = -4$ gäbe ein negatives y, man erhält daher folgende 4 Werthe:

$\frac{1}{12} + \frac{17}{30}$, $\frac{3}{12}$ und $\frac{12}{30}$, oder $\frac{5}{12}$ und $\frac{7}{30}$, oder auch

$\frac{7}{12}$ und $\frac{2}{30}$.

Alle diese Paare geben die Summe $\frac{39}{60}$ oder $\frac{13}{20}$, und haben die Nenner 12 und 30; sie sind daher richtig.

§. 3. Aufgaben.

1) Es sei $2x + 5y = 48$; welche ganze positive Werthe können x und y haben?

2) Welche ganze positive Werthe können x und y in der Gleichung $3x - 46y = 11$ haben?

3) Es sollen zwei zweizifferige positive Zahlen gefunden werden, von welchen die 8fache erste und die dreifache 2te zusammen 158 geben.

4) Die Hälfte einer einzifferigen Zahl und der dritte Theil einer zweizifferigen sind zusammen = 8; wie heißen die 2 Zahlen?

5) Ein Kaufmann verkauft von zwei verschiedenen Waaren von jeder eine gewisse Anzahl Pfunde; von der ersten kostet 1 ℔ 20 kr., und von der 2ten 17 kr. Wenn er nun im Ganzen 28 fl. 20 kr. löste; wie viel Pfunde von jeder Waare hat er verkauft?

6) Ein Weinhändler hat 2 Sorten Wein gemischt, von der ersten kostet die Maaß 32 kr. und von der 2ten 24 kr.; wenn nun die Mischung weniger als 30 Maaß beträgt und 14 fl. werth ist, wie viel Maaß von jeder Sorte enthält dieselbe?

7) In einer Kasse befinden sich 78 Stücke Geld, nämlich Kronenthaler und preussische Thaler, deren Werth im Ganzen weniger als 150 fl. beträgt; wie viele Stücke von jeder Geldsorte sind darin, und wie groß ist die ganze Summe?

8) Welche Zahlen lassen durch 31 getheilt 5 zum Rest, und durch 58 getheilt 7 als Rest?

9) Welche dreizifferigen Zahlen haben die Eigenschaft, daß sie durch 79 ohne Rest theilbar sind, und durch 55 getheilt den Rest 10 geben?

10) Welche vierzifferigen Zahlen haben die gleichen Eigenschaften wie in Aufgabe 9?

11) Ein Landwirth will ein rechteckiges Stück Feld mit Bäumen bepflanzen, von denen er fast 300 Stücke hat. Setzt er in jede Reihe 25 Stücke, so bleiben ihm 19 übrig; pflanzt er aber in jede Reihe 30 Stücke, so fehlen ihm noch 6 Stücke, um die letzte Reihe vollständig zu machen; wie viele Bäume hat er?

12) Es sollen alle Vielfachen von 30, welche durch 37 getheilt den Rest 12 lassen, gefunden werden.

13) Die Zahl 1846 soll in zwei solche Theile zerlegt werden, daß der eine durch 23 und der andere durch 42 theilbar ist; wie heißen diese Theile?

14) In der Chronologie (Zeitrechnung) wird gelehrt, daß die sogenannte goldene Zahl eines Jahres gefunden wird, wenn man die Jahreszahl um 1 vermehrt und dann durch 19 theilt; der Rest ist dann = der goldenen Zahl; der sogenannte Sonnenzirkel ist aber derjenige Rest, den die um 9 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 28 übrig läßt. Welches Jahr in diesem Jahrhundert hat nun die goldene Zahl 15, und den Sonnenzirkel 18?

15) Eine Summe von 116 fl. soll theilweise in Fünffrankenstücken (zu 2 fl. 20 kr.) und der Rest in kleinen Thalern (zu 1 fl. 20 kr.) entrichtet werden; wie kann dieses geschehen?

§. 4. Unbestimmte Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

Wenn zwei Gleichungen gegeben sind, welche drei Unbekannte enthalten; so bringt man diese auf eine Gleichung mit 2 Unbekannten. Man eliminire z. B. z und bestimme die Form für y, suche die verschiedenen Werthe von y und x, und substituire diese in eine der zwei gegebenen Gleichungen, so wird auch z gefunden. Z. B.

$$\text{I)}\quad 9x + 7y + 3z = 702.$$
$$\text{II)}\quad x + y + z = 100.$$

$$\text{I} - \text{II}.3)\quad 6x + 4y = 402 \quad \text{oder} \quad \text{III)}\ 3x + 2y = 201.$$

Hieraus: $y = 100 - x + \frac{1-x}{2}$,

$\frac{1-x}{2} = m$, $x = 1 - 2m$, und $y = 99 + 3m$, mithin aus Gleichung II) $1 - 2m + 99 + 3m + z = 100$, woraus dann $z = -m$ folgt.

Setzt man nun $m = 0$, so wird $x = 1$, $y = 99$ und $z = 0$.
" " " $m = 1$, " " $x = -1$, $y = 102$ " $z = -1$.
. . . .
Oder für $m = -1$, wird $x = 3$, $y = 96$, $z = 1$.
und " $m = -2$, " $x = 5$, $y = 93$, $z = 2$.
u. s. w.

Wenn 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten gegeben sind, so sucht man aus diesen 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten u. s. w.

Aufgaben.

1) Welche Zahlen gehen durch 5 auf, lassen durch 7 getheilt 3 zum Rest, und durch 11 getheilt den Rest 6?

Auflösung.

Die 3 Quotienten seien x, y und z, so folgen für die Zahlen folgende 3 Formen:

$$5x, \quad 7y + 3 \quad \text{und} \quad 11z + 6.$$

Hieraus I) $5x = 7y + 3$

$$7y + 3 = 11z + 6, \quad \text{oder:}$$
$$\text{II)}\quad 7y = 11z + 3.$$

Man suche nun y in z auszudrücken, und setze dann den Werth von y in die Gleichung I, so folgt:

$$y = z + \frac{4z+3}{7}, \quad \frac{4z+3}{7} = m, \quad z = m + \frac{3m-3}{4}$$

$$\frac{3m-3}{4} = n, \quad m = n+1+\frac{n}{3}, \quad \frac{n}{3} = p;$$ so ist:

$$n = 3p, \text{ und } m = 4p+1, \quad z = 7p+1, \quad y = 11p+2.$$

In I gesetzt, gibt: $5x = 7(11p+2)+3 = 77p+17$,

daher $x = 15p + 3 + \frac{2p+2}{5}, \quad \frac{2p+2}{5} = q$,

$$2p + 2 = 5q \text{ und } p = 2q - 1 + \frac{q}{2}.$$

Wird nun $\frac{q}{2} = r$ gesetzt, so folgt:

$$q = 2r, \quad p = 5r - 1, \quad x = 15(5r-1) + 3 + 2r;$$

also $x = 77r - 12$.

Die gesuchten Zahlen haben daher die Form

$$5x = 5(77r - 12) = 385r - 60,$$

oder wenn man für r die Größe $s + 1$ setzt, um die negative Größe wegzubringen:

$$385s + 325.$$

Für $s = 0$, folgt die Zahl 325
" $s = 1$ " " " 710
" $s = 2$ " " " 1095 u. s. w.

Probe. $\frac{325}{5} = 65$, $\frac{325}{7} = 46$, und der Rest ist = 3, 325 : 11 gibt 29, und der Rest ist = 6 u. s. w.

2) Es sollen 3 ganze positive Zahlen gefunden werden, von welchen das 7fache der ersten Zahl um 8 größer ist als die Summe der 2 anderen; und die 9fache 2te Zahl und die 5fache 3te sollen zusammen = 312 sein.

Auflösung.

Die 3 Zahlen seien x, y und z, so hat man

$7x = 8 + y + z$, oder I) $7x - y - z = 8$
und II) $9y + 5z = 312$

Aus I z in II gesetzt, gibt: $9y + 5(7x - y - 8) = 312$,
woraus III) $35x + 4y = 352$ folgt.

Daher: $y = 88 - 8x - \frac{3x}{4}$; $\frac{3x}{4} = m$ gesetzt,

gibt $x = \frac{4m}{3} = m + \frac{m}{3}$, $\frac{m}{3} = n$, also $m = 3n$;

substituirt, gibt: $x = 4n$.

$$y = 88 - 32n - 3n = 88 - 35n;$$

y in II gesetzt, gibt:

$$z = \frac{312 - 792 + 315n}{5}, \text{ oder } z = 63n - 96.$$

Wird nun $n = 2$ gesetzt, so folgt: $x = 8$, $y = 18$ und $z = 30$, die anderen Werthe geben negative Zahlen.

Oder setze $n = p + 2$, damit die negative Zahl aus der Form verschwindet, so folgt:

$$z = 63p + 30, \quad y = 18 - 35p, \quad x = 4p + 8.$$

$p = 0$, gibt: $z = 30$, $y = 18$, $x = 8$, wie oben.

3) Ein Silberarbeiter hat dreierlei Silberstangen, nämlich Feinsilber (16löthiges), 14löthiges und 12löthiges. Er will nun eine Masse bilden, welche aus 20 Mark 13löthigem Silber besteht; wie viel muß er von jeder der 3 Sorten zusammenschmelzen, um diese Masse zu erhalten?

Auflösung.

Er nehme x, y und z Mark von den 3 Sorten; so erhält man:

$$\text{I)} \quad x + y + z = 20.$$

$$\text{II)} \quad 16x + 14y + 12z = 260.$$

Aus I) z in II gesetzt, gibt: III) $2x + y = 10$, woraus $y = 10 - 2x$, und aus Gleichung I,

$$z = x + 10.$$

Nimmt man nun $x = 1$, so wird $y = 8$ und $z = 11$.
" " ferner $x = 2$, " " $y = 6$ " $z = 12$.
" " " $x = 3$, " " $y = 4$ " $z = 13$.
" " " $x = 4$, " " $y = 2$ " $z = 14$.

Es sind daher 4 Mischungen möglich.

Probe.

Z. B.	3 Mark	16löthiges Silber	gibt	48 Lothe
	4 "	14 " "	"	56 "
und	13 "	12 " "	"	156 "

zusammen 20 Mark Mischung, welche 260 Lothe Silber enthalten; also hat jede Mark $\frac{260}{20} = 13$ Loth.

Anmerkung.

Man hätte diese Aufgabe auch durch eine Gleichung lösen können; nämlich man nehme x Mark 16löthiges, y Mark 14löthiges, und 20 — x — y Mark 12löthiges.

Löset die Aufgabe auf diese Art!

4) Es sollen 3 ganze positive Zahlen gefunden werden, welche folgende Beschaffenheit haben:

1) Die 6fache erste, die 13fache 2te und die 7fache dritte sollen zusammen 193 geben; und

2) Die 5fache erste Zahl soll um 2 größer sein, als die Summe der 11fachen 2ten und der 18fachen dritten Zahl.

Auflösung.

Die 2 Gleichungen sind: I) $6x + 13y + 7z = 193$.

und $5x = 11y + 18z + 2$, oder II) $5x - 11y - 18z = 2$.

Eliminire x durch I . 5 — II . 6, so folgt:

$$\text{III)}\ 131y + 143z = 953.$$

Hieraus $y = -z + 7 + \frac{36 - 12z}{131}$; $\frac{36 - 12z}{131} = \frac{12(3 - z)}{131}$;

$\frac{3 - z}{131} = m$ gesetzt, gibt: $z = 3 - 131m$

und $y = -z + 7 + 12m = -3 + 131m + 7 + 12m$

$y = 143m + 4$,

diese Werthe für y und z in I gesetzt, gibt:

$$x = \frac{193 - 13(143m + 4) - 7(3 - 131m)}{6} = 20 - 157m.$$

Setzt man nun in den 3 Formen für x, y und z, die Größe $m = 0$; so folgt: $x = 20$, $y = 4$, $z = 3$.

Die anderen Werthe sind negativ. Daher haben nur die drei Zahlen 20, 4 und 3 die geforderten Eigenschaften.

Prüfet diese Werthe!

5) Die Garnison einer Festung besteht aus 3200 Mann, diese soll nun zur Belohnung für ihre, bei einer Belagerung bewiesene, Tapferkeit 45000 fl. erhalten; nämlich jeder Offizier 100 fl., jeder Infanterist 10 fl., jeder Reiter 12 fl. und jeder Kanonier 15 fl. Wenn man jedem Offizier nur 80 fl., jedem Infanteristen aber 11 fl., jedem Reiter 14 fl. und jedem Kanonier 16 fl. geben würde, so wären 46600 fl. nöthig; wie viele Offiziere, Infanteristen, Reiter und Kanoniere befinden sich in der Festung?

Auflösung.

Es seien x Offiziere; y Infanteristen, z Cavalleristen und u Artilleristen; so erhält man die 3 Gleichungen:

$$\text{I)}\quad x + y + z + u = 3200.$$
$$\text{II)}\quad 100x + 10y + 12z + 15u = 45000.$$
$$\text{III)}\quad 80x + 11y + 14z + 16u = 46600.$$

Aus I, u in II und III gesetzt, gibt:

$$\text{IV)}\quad u = 3200 - x - y - z.$$
$$\text{V)}\quad 85x - 5y - 3z = -3000.$$
$$\text{VI)}\quad 64x - 5y - 2z = -4600.$$
$$\text{V} - \text{VI)}\quad 21x - z = 1600.$$

Hieraus $z = 21x - 1600$. Diesen Werth in V gesetzt, gibt:

$$85x - 5y - 63x + 4800 = -3000 \text{ oder:}$$

$$22x - 5y = -7800, \text{ hieraus } y = 1560 + \frac{22x}{5}.$$

Setzt man $x = 5m$, so ist $\frac{22x}{5} = 22m$, und

$y = 1560 + 22m$,
$z = 105m - 1600$, daher nach Gleichung IV:
$u = 3240 - 132m$.

Wenn nun für m irgend eine ganze Zahl angenommen wird, so werden auch x, y, z und u ganze Zahlen.

Aus dem Werthe von z folgt, daß 105m größer als 1600 sein muß (sonst wird z negativ).

Daher $m = \frac{1600}{105} = 15\frac{5}{21}$, man setze daher:

$m = 16$, so folgt: $x = 80$, $y = 1912$, $z = 80$ und $u = 1128$
$m = 17$, „ „ $x = 85$, $y = 1934$, $z = 185$ „ $u = 996$.
$m = 18$, „ „ $x = 90$, $y = 1956$, $z = 290$ „ $u = 864$.
$m = 19$, „ „ $x = 95$, $y = 1978$, $z = 395$ „ $u = 732$.
$m = 20$, „ „ $x = 100$, $y = 2000$, $z = 500$ „ $u = 600$.
$m = 21$, „ „ $x = 105$, $y = 2022$, $z = 605$ „ $u = 468$.
$m = 22$, „ „ $x = 110$, $y = 2044$, $z = 710$ „ $u = 336$.
$m = 23$, „ „ $x = 115$, $y = 2066$, $z = 815$ „ $u = 204$.
$m = 24$, „ „ $x = 120$, $y = 2088$, $z = 920$ „ $u = 72$

Anmerkungen.

1) Wäre nun z. B. noch ferner gegeben, daß die Anzahl der Soldaten jeder Waffengattung durch 100 theilbar ist; so erhielte man nur eine Antwort, nämlich 100 Offiziere, 2000 Infant., 500 Cavall. und 600 Artill.

2) Man kann diese Zahlen auch vom Werthe m = 18 an finden, ohne m zu substituiren; wenn man beobachtet, daß die Reihe für x die Differenz 5, die für y die Differenz 22, die für z die Differenz 105, und endlich die Reihe für u die Differenz — 132 hat.

§. 5. Aufgaben über unbestimmte Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

1) Welche Zahlen lassen durch 4, 10 und 24 dividirt, der Reihe nach die Reste 1, 7 und 9?

2) Welche dreizifferige Zahlen lassen durch 3 dividirt 2, durch 7 getheilt 3, und durch 10 getheilt 9 zum Reste?

3) Es kauft Jemand dreierlei Waaren für 2100 fl., und bezahlt für jeden Centner der ersten Waare 70 fl., für jeden Centner der 2ten 80 fl. und für jeden Centner der 3ten 90 fl. Wenn nun außerdem bekannt ist, daß von der 2ten Waare mehr als doppelt so viele Centner gekauft wurden als von der ersten; wie viele Centner wurden von jeder Waare gekauft?

4) Eine Gesellschaft von Männern, Weibern und Kindern, im Ganzen 30 Personen, verzehren zusammen 12 fl. 25 kr., wovon auf jeden Mann 38, auf jede Frau 19 und auf jedes Kind 7 Kreuzer kommen; aus wie vielen Männern, Weibern und Kindern bestand die Gesellschaft?

5) Es sollen drei ganze positive Zahlen von folgenden Eigenschaften gefunden werden: 1) die doppelte erste und die fünffache zweite sollen zusammen um 22 größer sein, als die 7fache dritte, 2) das Dreifache der ersten und das 4fache der zweiten sollen zusammen das 8fache der dritten geben.

6) Ein Geflügelhändler besitzt 50 Stücke Geflügel, nämlich Gänse, Hühner und Enten. Er verkauft jede Gans um 1 fl. 12 kr., jedes Huhn für 42 kr. und jede Ente für 36 kr; wenn er nun für alle zusammen 44 fl. löst, wie viele Stücke hat er von jeder Gattung?

7) Die Zahl 70 soll in drei solche Theile getheilt werden, daß wenn man den ersten mit 9, den 2ten mit 4 und den 3ten mit 5 multiplicirt, die Summe dieser 3 Produkte = 450 ist. Wie heißen die 3 Theile?

8) Man soll eine dreizifferige Zahl finden, von welcher die erste Ziffer um 3 kleiner ist als die Summe der doppelten 2ten und der 3fachen 3ten Ziffer. Wenn man ferner von der gesuchten Zahl 693 abzieht, so erscheint eine andere Zahl, welche dieselben Ziffern hat, aber in umgekehrter Ordnung; wie heißt die Zahl?

9) Welche dreizifferigen Zahlen haben die Eigenschaft, daß sie durch 11 getheilt aufgehen, durch 13 getheilt 11, und durch 30 getheilt 13 zum Rest lassen?

10) Welche drei ganzen positiven Zahlen haben die Eigenschaft, daß das 20fache der ersten um 9 größer ist als das 9fache der Summe der 2ten und der dritten Zahl; während die doppelte erste Zahl in den Unterschied zwischen der 2ten und 3ten Zahl getheilt, den Quotienten $\frac{1}{6}$ gibt?

11) Welche dreizifferigen Zahlen lassen sich durch 5 und 10 ohne Rest theilen, und geben durch 4 und 9 getheilt die Reste 2 und 3?

12) In einem Geldbeutel befanden sich anfangs 39 Stücke Geld und zwar Kronenthaler, Guldenstücke, Sechser und Kreuzer, im Ganzen 14 fl. Es wurde dann die Hälfte der Kronenthaler und der 3te Theil der Guldenstücke ausgegeben, um etwas zu kaufen; wobei man wieder 8 Sechser, und noch halb so viele Kreuzer herausbekam, als Kreuzer im Beutel waren; diese wurden zu dem übrigen Gelde in den Beutel gethan. Wenn nun jetzt die ganze Baarschaft 10 fl. 9 kr. beträgt, wie viele Stücke von jeder Geldsorte enthielt der Beutel anfangs?

13) Löset die folgenden Gleichungen auf, in denen x, y, z und u ganze positive Zahlen bedeuten:

$$\text{I)}\ x + 3y = 48,\quad \text{II)}\ 2y + 3z = 56,\quad \text{III)}\ 4z + u = 51.$$

14) Welche Zahlen gehen durch 7 getheilt auf, und lassen durch 5, 6 und 8 dividirt, der Reihe nach die Reste 3, 1 und 5?

15) Es sollen vier positive ganze Zahlen gefunden werden, von welchen die 6fache erste, die 8fache 2te, die 11fache dritte und die 15fache 4te zusammen 1910 geben; ferner sollen die erste, 2te, 3te und 7fache 4te zusammen = 450 sein; während die vierfache erste Zahl um 70 größer ist als die 3fache Summe der drei anderen.

16) Es sollen vier ganze positive Zahlen gefunden werden. Die Summe aller soll = 900 sein; die doppelte erste, 4fache zweite, 6fache dritte und 10fache vierte sollen zusammen = 12000, und die doppelte Summe der 2ten, 3ten und 4ten Zahl soll mit der dreifachen ersten Zahl zusammen 4540 geben.

§. 6. Behandlung einiger unbestimmten Gleichungen vom zweiten Grade.

Diese können vielerlei Formen haben, für welche wieder besondere Auflösungen gelten; man hat jedoch auch eine allgemeine Auflösung, nach welcher alle einzelnen Fälle behandelt werden können, die aber ziemlich weitläufig ist. Wir wollen hier das Verfahren bei einzelnen der leichteren Fälle an einigen Aufgaben zeigen.

1) Es sollen zwei ganze positive Zahlen gefunden werden, deren Produkt um 41 größer ist als die Summe der Zahlen.

Auflösung.

Die zwei Zahlen seien x und y, so ist:

$$xy = 41 + x + y, \text{ woraus } y = \frac{41 + x}{x - 1},$$

oder: $y = \frac{x + 41}{x - 1}$. Durch Division findet man nun:

$$y = 1 + \frac{42}{x - 1}.$$

Soll nun y eine ganze Zahl sein, so muß sich 42 durch $x - 1$ theilen lassen, daher müssen die Werthe von $x - 1$ Faktoren von 42 sein.

Diese Faktoren sind 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 und 42;
daher muß $x - 1 = 1$, $x - 1 = 2$. $x - 1 = 3$ u. s. w.
Oder $x = 2, 3, 4, 7, 8, 15, 22$ und 43 gesetzt werden,
wodurch $y = 43, 22, 15, 8, 7, 4, 3$ und 2 wird.

Die Werthe wiederholen sich, man erhält daher, weil x und y (wie schon aus der Natur der Aufgabe folgt) verwechselt werden können, folgende Zahlen:

2 und 43, 3 und 22, 4 und 15, 7 und 8.

2) Der Bruch $\frac{17}{30}$ soll in die Summe zweier anderen Brüche zerlegt werden, welche die Zähler 2 und 1 haben.

Auflösung.

Die Nenner seien x und y, so folgt:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{17}{30}$$

woraus: $60y + 30x = 17xy$, oder:

$$y = \frac{30x}{17x - 60} \text{ folgt.}$$

x muß nun wenigstens $= 4$ sein, denn für $x < 4$ wird y negativ,

für $x = 4$, folgt: $y = \frac{30 \cdot 4}{8} = 15$,

" $x = 5$, " $y = 6$, u. s. w.

Man erhält daher die Brüche $\frac{2}{4} + \frac{1}{15}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{6}$ u. s. w.

Probe.

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}, \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{17}{30} \text{ u. s. w.}$$

3) Ein Quadrat und ein Rechteck haben gleiche Länge, die Inhalte beider betragen zusammen 120 Fuß. Wie lang sind beide, und wie breit ist das Rechteck; wenn die Abmessungen ganze Zahlen sind?

Auflösung.

Die Längen seien $= x$, die Breite des Rechtecks $= y$; so folgt:

$$x^2 + xy = 120.$$

Hieraus $y = \frac{120 - x^2}{x} = \frac{120}{x} - x$.

Die Länge x muß daher ein Faktor von 120 sein und $\frac{120}{x}$ muß größer sein als x.

Die Faktoren von 120 sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12...
Man erhält daher für $x = 1$, $x = 2$, u. s. w. die Werthe:
$x = 1$, $y = 119$, und $x = 2$, $y = 58$, ferner $x = 3$, $y = 37$,
$x = 4$, $y = 26$, „ $x = 5$, $y = 19$, „ $x = 6$, $y = 14$,
$x = 8$, $y = 7$, „ $x = 10$, $y = 2$.

Also im Ganzen 8 zusammengehörige Werthe.

Probe.

Z. B. $4^2 + 4 \cdot 26 = 16 + 104 = 120$, und $10^2 + 10 \cdot 2 = 120$ u. s. w.

4) Es sei die Gleichung $10y = x^2 + 5$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Man erhält $y = \frac{x^2 + 5}{10}$.

Hier muß x so angenommen werden, daß x^2 in der letzten Ziffer die Zahl 5 erhält, weil nur dann $x^2 + 5$ eine Zahl gibt, welche als letzte Ziffer eine Null erhält (die also durch 10 theilbar ist).

Man setze daher $x = 5$, 15, 25, 35, 45, 55 u. s. w.
so folgt $y = 3$, 23, 63, 123, 203, 303 u. s. w.

5) Es sollen zwei ganze positive Zahlen gefunden werden, deren dreifache Summe um 12 größer ist als das Quadrat der einen Zahl.

Auflösung.

Die 2 Zahlen seien x und y, so folgt: $3(x + y) = x^2 + 12$, woraus $y = \frac{x^2}{3} - x + 4$.

x muß nun so angenommen werden, daß $\frac{x^2}{3}$ eine ganze Zahl wird, daher muß x^2 durch 3 theilbar sein, oder x^2 muß die Form $3m$ haben,
für $m = 3$ folgt: $x^2 = 9$, $x = 3$ und $y = 4$
„ $m = 12$ „ $x^2 = 36$, $x = 6$ „ $y = 10$
„ $m = 27$ „ $x^2 = 81$, $x = 9$ „ $y = 22$
„ $m = 48$ „ $x^2 = 144$, $x = 12$, „ $y = 40$ u. s. w.
m muß die Form $3n^2$ haben, weil dann $3m = 9n^2$ ein vollständiges Quadrat $= x^2$ ist.

6) Die Inhalte zweier Quadrate sind zusammen $= 50$; wenn nun die Seiten derselben ganze Zahlen sein sollen, wie groß sind sie?

Auflösung.

Wenn man die Seiten durch x und y bezeichnet, so erhält man die Gleichung:

$x^2 + y^2 = 50$, woraus $y = \sqrt{(50 - x^2)}$.

Man ziehe nun die Quadratzahlen, welche kleiner sind als 50, von 50 ab; und wenn der Rest wieder eine Quadratzahl ist, so erhält man 2 Werthe für x und y.

1,	4,	9,	16,	25,	36,	49	sind die Quadratzahlen, und
49,	46,	41,	34,	25,	14,	1	„ „ Reste.

Von diesen sind 49, 25 und 1 Quadratzahlen, daher

$x = 1$, $y = 7$, und $x = 5$, $y = 5$, und $x = 7$, $y = 1$.

Man erhält daher die Seiten 1 und 7, oder 5 und 5.

7) Der sogenannte pythagoräische Lehrsatz zeigt, daß das Quadrat der größten Seite eines rechtwinkligen Dreiecks = der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten ist. (Siehe Geom. §. 81.)

Wie groß müssen nun die zwei kleineren Seiten (in ganzen Zahlen) genommen werden, damit die Länge der 3ten Seite eine ganze Zahl wird?

Auflösung.

Die 2 kleineren Seiten seien x und y, die größte Seite = z, so ist:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Hieraus folgt: $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$.

Setzt man nun z. B. $z + y = a$ und $z - y = b$, so ist 1) $x^2 = ab$, und wenn man die 2 Hilfsgleichungen zuerst addirt und dann auch abzieht, so folgt:

$$2) \; z = \frac{a + b}{2} \quad \text{und} \quad 3) \; y = \frac{a - b}{2}.$$

a und b müssen nun zwei ganze Zahlen sein, welche entweder beide gerade, oder beide ungerade sind (weil sonst z und y keine ganzen Zahlen werden); ferner muß ab eine Quadratzahl (x^2) und $a > b$ sein (weil $y = \frac{a - b}{2}$ ist).

Nimmt man nun hiernach z. B.

$a = 9$	und	$b = 1$,	so ist	$x^2 = 9$,	$x = 3$,	$z = 5$,	$y = 4$.
$a = 8$	„	$b = 2$,	„ „	$x^2 = 16$,	$x = 4$,	$z = 5$,	$y = 3$.
$a = 25$	„	$b = 1$,	„ „	$x^2 = 25$,	$x = 5$,	$z = 13$,	$y = 12$.
$a = 18$	„	$b = 2$,	„ „	$x^2 = 36$,	$x = 6$,	$z = 10$,	$y = 8$.
$a = 49$	„	$b = 1$,	„ „	$x^2 = 49$,	$x = 7$,	$z = 25$,	$y = 24$.
$a = 16$	„	$b = 4$,	„ „	$x^2 = 64$,	$x = 8$,	$z = 10$,	$y = 6$.
$a = 32$	„	$b = 2$,	„ „	$x^2 = 64$,	$x = 8$,	$z = 17$,	$y = 15$.
$a = 81$	„	$b = 1$,	„ „	$x^2 = 81$,	$x = 9$,	$z = 41$,	$y = 40$.
$a = 27$	„	$b = 3$,	„ „	$x^2 = 81$,	$x = 9$,	$z = 15$,	$y = 12$.
$a = 50$	„	$b = 2$,	„ „	$x^2 = 100$,	$x = 10$,	$z = 26$,	$y = 24$.

u. s. w.

Probe.

$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$, $4^2 + 3^2 = 25 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ u. s. w.

Man nennt diese Zahlen pythagoräische. Außer der oben gegebenen Methode gibt es noch mehrere andere, um diese Zahlen zu finden.

§. 7. Aufgaben.

1) Ein Rechteck hat 324 Fuß Inhalt; wenn nun die Längen seiner Seiten ganze Zahlen sind; wie groß sind dieselben?

2) Das Produkt zweier Zahlen ist um 90 größer als die größere Zahl; wie groß sind die zwei Zahlen?

3) Löset die Gleichung $xy + x + y = 175$ auf, für ganze positive Werthe.

4) Von welchen zwei ganzen positiven Zahlen ist das Produkt gleich der Summe?

5) Von welchen zwei ganzen positiven Zahlen ist die Differenz der Quadrate gleich der Summe der zwei Zahlen?

6) Die Gleichung $xy = a(x + y) + a^2$ so aufzulösen, daß x und y ganze Zahlen und Vielfache von a werden.

7) Wie zerlegt man den Bruch $\frac{19}{21}$ in die Summe zweier anderen, deren Zähler $= 5$, und $= 1$ sind?

8) Es werden zwei ganze positive Zahlen gesucht, deren Produkt ihre doppelte Differenz um 20 übertrifft.

9) Die Gleichung $x^2 = 12y + 4$ so aufzulösen, daß x und y ganze Zahlen werden.

10) Die Summe der Quadrate zweier ganzen Zahlen verhält sich zur Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen wie $61 : 11$; wie heißen diese Zahlen?

11) Die Differenz der Quadrate zweier ganzen Zahlen ist um 60 größer als die Summe der zwei Zahlen; wie heißen dieselben?

12) Die größte Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 10$ Fuß; wie lang sind die 2 anderen Seiten (in ganzen Zahlen ausgedrückt)?

Resultate

und

Andeutungen zu den im Lehrbuche enthaltenen Uebungsaufgaben.

A. Resultate der Aufgaben aus der Buchstabenrechnung.

Erster Abschnitt.

Buchstabenrechnung im Allgemeinen.

Seite 4 bis 25.

§. 2. Addition.

Nro. 5) **$11a + 13b$**, Nro. 8) **$15a + 5m + 9n + 7p$**.

§. 4. Subtraction.

Nro. 3) **$2a + 3b + 7c$**; Nro. 5) **$8a + 132x + y + 5z$**.

" 7) **$a + 6b + 5c$**.

§. 6. Multiplication, Seite 7 und 8.

Nro. 7) **$6aa + 19ab + 10bb$**, Nro. 8) **$30aa + 47ax + 14xx$**

" 9) **$8mm + 26mmn + 15mmnn$**, Nro. 10) **$60 + 50a + 10aa$**.

" 11) **$2aaa + 9aab + 14abb + 15bbb$**.

" 12) **$8xx + 8xy + 24xz + 2yy + 12yz + 18zz$**.

" 13) **$70x + 115xx + 53xy + 40xxx + 23xxy + 14y + 6yy + 3xyy$**.

§. 8. Division, Seite 8 und 9.

Die Aufgaben **1** bis 8 und **Nro. 10** gehen auf, (**10** ist zuerst zu ordnen). Nro. **9** ordne wie folgt:

$(12cc + 6bc + 29ac + \ldots\ldots) : (4c + 2b + 3a)$,

so folgt als Quotient: **$3c + 5a$**, und **$2bb + 5ab$** bleibt Rest.

§. 10. Bruchrechnung, Seite 14.

§. 10 *a*) Nro. 2) $3\frac{47}{72}x$ und $\frac{adg + bcg + bdf}{bdg}$.

" 3) $\frac{19ac + 12bc}{2d}$, 4) $\frac{8ax + 15x + 8yy}{12ay}$.

" 5) $\frac{6an + 3bcn + 2bn}{(a + b)c}$.

§. 10 *b*) Nro. 2) $\frac{5ax}{2c}$, $\frac{7xy}{bd}$ und $\frac{9a}{35b}$.

" 3) $\frac{45ay - 24a}{50xy}$ und $\frac{96a + 11b}{12cd}$.

" 4) $\frac{27a}{5}$, und $\frac{24abb - 2ad}{3b}$.

" 5) $\frac{ad + bc - abd}{bd}$ und $\frac{7aab + 6bcc}{3acd}$.

§. 10 *c*) Nro. 1) $6a$, $\frac{7}{5}a$; $6x$ und $\frac{6mz}{y}$.

" 2) 1, $\frac{c}{d}$, $\frac{bf}{cg}$. Nro. 3) $\frac{2a}{x}$ und $14r$.

" 4) $\frac{2}{b} + \frac{3}{a}$ und $\frac{b}{2} + \frac{3a}{4}$.

" 5) $\frac{45b}{4y} + \frac{12b}{x}$ und $1 + \frac{9nn}{8mm}$.

" 6) $a + \frac{bc}{x} + \frac{ax}{bc} + 1$,

" 7) $\frac{d}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$.

" 8) $2 + \frac{bc}{ax} + \frac{ax}{bc} + \frac{bd}{ay} + \frac{dx}{cy}$.

" 9) $\frac{17x}{12z} + \frac{2xx}{3yy} + \frac{2xz}{3uy} + \frac{3yy}{4zz} + \frac{3y}{4u}$.

" 10) $\frac{2aaa}{3bbb} + \frac{4aac}{bbd} + \frac{8acc}{bdd} + \frac{16ccc}{3ddd}$.

§. 10 *d*) Nro. 1) letztes Beispiel $\frac{7b}{6cx}$.

" 2) $2\frac{1}{12}$, $\frac{7b}{3a}$, und $\frac{3m}{2}$.

§. 10 *d*) Nro. 3) $\frac{5}{16d}$, und $\frac{aac}{d} + \frac{abcc}{dd}$.

" 4) $\frac{2a}{b} + 1$. 5) $\frac{2a}{3b} + 1$. 6) $\frac{5}{2x} + \frac{1}{by}$.

§. 12. Gemeinschaftliches Maaß, Seite 19.

Nro. 2) 3abd. 3) Die Theiler sind 62 und 11.

" 4) 91. 5) Gibt $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{40}{63}$ und $6\frac{13}{27}$.

" 6) $\frac{7}{55}$, $\frac{193}{311}$ kann nicht verkürzt werden, $\frac{2}{5}$, $\frac{127}{200}$.

" 7) Theiler $= 3y + x$; Bruch $= \frac{6x + 5}{3x + 2}$.

§. 15. Rechnung mit entgegengesetzten Größen, Seite 24.

§. 15 *a*) Nro. 1) $7a$, 2) $-8x + 8y$, 3) 0.

" 4) $8a - 2b + d$, 6) $3b + 8m - 4n$.

" 5) $11ac - 10bd - 4cx - y + z + 2$.

§. 15 *b*) Nro. 1) $-2a + 16b - 8c + 3d$, und ferner $-7ac + 4bd + 20cx - y - z + 22$.

" 2) $11aa - 21ab - xy + 7z + 2$.

" 3) Die Zeichen der Größen in der Klammer werden umgekehrt, und man erhält $-2b$.

§. 15 *c*) Nro. 2) $27aa$ und $-\frac{7ab}{3}$.

" 3) $2bcy$; Nro. 6) $10aa - 29ab + 21bb$.

" 7) $9xx - 16yy$; Nro. 8) $-4mm + 16m - 16$.

" 9) $10aa - 31ab - 16ac - 14bb + 17bc + 6cc$.

" 10) $-\frac{12aa}{bb} + \frac{6aac}{bbd} - \frac{18ad}{bc} + \frac{6d}{c} + \frac{9bdd}{acc} + \frac{2ac}{bd} - \frac{acc}{bdd}$.

" 11) $10aaa - 40abb - 6aab + 24bbb$.

§. 15 *d*) Nro. 2) $-\frac{3ag}{5bf}$, und $\frac{21xn}{2y}$.

" 3) Ja, der Bruch hat denselben Werth!

" 5) $4a - 4x$; Nro. 6) $4aa - 4ab + bb$.

" 7) $9a + 6n$; " 8) $9 + 6x + 4xx$.

§. 15 *d*) Nro. 9) $2a - b + c$; Nro. 10) $\frac{2a}{b} - \frac{3}{2}$.

" 11) $1 + 2x + 2xx + 2xxx + \ldots$ u. s. w.

Zweiter Abschnitt.

Potenzrechnung. Seite 25 bis 38.

§. 3. Addition und Subtraction, Seite 26.

Nro. 2) $10{,}6b^2$. Nro. 3) $\frac{11}{8}a^3x + \frac{a^2x^2}{6}$.

" 4) $2{,}2x^3 - 3x^4 - 9{,}31x^2$.

" 5) add. gibt: $5a + 12b^2 + 4c^2$; subtrah. $= -a - 6b^2 - 12c^2$.

" 6) " " $2.3^8 - 12.3^7 + 4^3$; " $= 2.2^5 + 4.3^7 - 4^3$.

" 7) $-a^3b^2 + 4a^4b^4 - 9a^2b^4 - 16c^5$.

" 8) addirt, gibt: $17\frac{5}{8}a^2 + 2\frac{2}{3}b^2 - 3\frac{13}{10}c^2$,

subtrah. " $-8\frac{5}{8}a^2 + 12b^2 - 15\frac{3}{20}c^2$.

§. 5. Multiplication, Seite 27.

Nro. 2) $-\frac{21a^{12}}{2}$, 3) $\frac{a^{11}}{9}$, 4) $-\frac{5a^5y^3}{12b^4c}$.

" 5) $5a^6b^2 + 10a^5b^4 - 15a^5b^6$.

" 6) $x^4 + 14x^2y^2 + 49y^4$, 7) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^4$.

" 8) $6a^4b^2m^2 - 4ac^2dm^2 + 8am^4n^2 - 9a^3b^2n^2 + 6c^2dn^2 - 12m^2n^4$.

" 9) $8a^7x^3 - 8a^3x^7 + 15ax^9$.

" 10) $625a^6b - 200a^4b^5 + 16a^2b^9$.

" 11) $\frac{2a^4}{3b^4} + \frac{2a^3c^2}{5b^3d} - \frac{6a^2c^4}{25b^2d^2} - \frac{18ac^6}{125bd^3}$.

" 12) $32m^4n - 240m^5n^2 + 720m^6n^3 - 1080m^7n^4 + 810m^8n^5 - 243m^9n^6$,

" 13) $-4x^9 + 64a^8x$.

§. 7. Division, Seite 30.

Nro. 1) $\frac{1}{a^4}$, $\frac{a^2}{b^5}$, $\frac{1}{a^3b^4}$ und a^2.

Nro. 2) $a^4 b^4$, $3^5 . 4^{-7}$, $a^2 b^8 x^{-9}$, $2^{-8} d^{-7} f^8 g^{-1}$.

„ 3) $2{,}5a^3$ und $-\frac{3c}{a^2}$, 4) $\frac{4a^3 x}{y^3}$, $\frac{6xy^5}{az^2}$.

„ 5) $-\frac{c^{p-3} d^p f^q}{6b^{2m+1}}$, 7) $-\frac{6}{ab} - \frac{1421a^2 b^3}{40} + \frac{3b}{8a^3}$.

„ 8) und 9) gehen auf! 10) $5a^2 - 6x^2$.

„ 11) $\frac{32}{a^4} + \frac{16c^3 d}{a^2} + 8c^6 d^2$.

„ 12) $8m^6 - 4m^4 + 2m^2 - 1$.
(Ordnet zuerst, ehe getheilt wird!)

„ 13) $\frac{3}{2} d^3 f^5 - \frac{d^6 f}{4}$.

„ 14) $a^4 + 8a^3 b + 24a^2 b^2 + 32ab^3 + 16b^4$.

„ 15) Setzet die Buchstaben aus den Nennern in die Zähler und theilet; so folgt: $\frac{a}{6xm^3} - \frac{c^3 x^3}{3am^5}$.

„ 16) $ac + 7a^2 bc + 5ac^3$.

„ 17) $1 + \frac{2x^2}{a^2} + \frac{2x^4}{a^4} + \frac{2x^6}{a^6} + \ldots\ldots$

„ 18) $a + x + \frac{2x^2}{a} + \frac{2x^3}{a^2} + \ldots\ldots$

§. 9. Potenzerhebung, Seite 34.

Nro. 1) a^6, 2^{12}, $\frac{1}{3^8}$, 4^6 und a^{12}.

„ 2) $\frac{1}{16x^{12}}$, $\frac{b^4}{3a^3}$, $\frac{16c^2 d^6 x^6}{25a^4 b^8}$.

„ 3) $(a^{-3})^{-4} = a^{12}$, $\frac{3^{10} g^{40}}{2^{10} a^{10} b^{30}}$ und $\frac{b^{18} d^{48}}{a^6 c^{24} g^{54}}$.

„ 4) $4a^2 + 4ab + b^2$, $4a^2 - 12ab + 9b^2$,

und $16a^{-4} - 24 + 9a^4$, oder $\frac{16}{a^4} - 24 + 9a^4$.

„ 5) $25a^6 + 70b^3 b^2 + 49b^4$, ferner:

$81a^8 f^6 - 60b^3 cf^3 + \frac{100b^6 c^2}{9a^8}$, und $\frac{16a^6}{b^2 c^4} + \frac{72a^3 b}{c^2 d} + \frac{81b^4}{d^2}$.

Nro. 6) $(70+1)^2 = 5041$, $(100+3)^2 = 10609$ und: $(500-1)^2 = 249001$, ferner $\frac{(700+2)^2}{(800+3)^2} = \frac{492804}{644809}$,

und $\left(-\frac{1000-2}{1000+7}\right)^2 = +\frac{996004}{1014049}$.

„ 7) $9a^2 + 12ab - 24ac - 16bc + 4b^2 + 16c^2$ und:
$4a^2 + 4ab + 12ac^2 - 4ad^3 + b^2 + 6bc^2 - 2bd^3 + 9c^4 - 6c^2d^3 + d^6$.

„ 8) $49a^{-6} - 25b^6$.

„ 9) $(2a + 3b^2)^2 - c^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4 - c^2$.

„ 10) $27a^3 + 18a^2b + 4ab^2 + \frac{8b^3}{27}$, ferner:

$8a^6b^3 - 18a^4bc + \frac{27a^2c^2}{2b} - \frac{27c^3}{8b^3}$, und:

$\frac{64a^{12}}{729b^9} + \frac{8a^6}{9b^3} + 3b^3 + \frac{27b^9}{8a^6}$.

„ 11) $-(30+1)^3 = -29791$, $(400+3)^3 = 65450827$,
dann: 7976023992 und $\frac{(600+3)^3}{(800-1)^3} = \frac{219256227}{510082399}$.

„ 12) $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

„ 13) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

§. 11. Faktorenzerlegung, Seite 37.

Nro. 1) $a^3b = a^3 . b = a^2 . ab = a . a^2b = a.a.a.b$ u. s. w.,
ferner: $a^2(1+b)$, $a^3(3a+b)$, und $4a^3x(a^2-2x)$.

„ 2) $a^2(a^2 - ab + x)$, und $3x^3(x - 3x^2 + 6 + 4y)$.

„ 3) $(a^2 + 3ab)(a^2 - 3ab)$ oder $a^2(a+3b)(a-3b)$,
und $(2a + 5b^2x) \times (2a - 5b^2x)$.

„ 4) $(a + b^2)(a + c^2)$ und $(x + 3y)^2$.

„ 5) $a(a^2 + 2ax - 3ax - 6x^2) = a(a+2x)(a-3x)$,
und $6ab(4a^2 - 4ab + b^2) = 6ab(2a-b)^2$.

„ 6) $\frac{x}{c}$, $\frac{5}{3}a^3$, 7) $\frac{(a+x)(a+b)}{(a+x)(a-x)} = \frac{a+b}{a-x}$,

und $\frac{(a+b)^2}{2(a^2-b^2)} = \frac{a+b}{2(a-b)}$.

„ 8) Setze $\frac{(a+b)^2(1+a+b)}{(a-b)(1+a+b)} = \frac{(a+b)^2}{a-b}$; ferner zerlege den anderen Ausdruck, in $\frac{a^2+3ab+6ab+18b^2}{(a+3b)^2} = \frac{a+6b}{a+3b}$.

Oder: 2) Wenn der Bruch abkürzbar sein soll, so kann nur $(a+3b)$ ein Theiler sein, weil nur dieser im Nenner vorkommt; suche daher, ob sich der Zähler auch durch $a+3b$ theilen läßt.

Oder: 3) Suche das gemeinschaftliche Maaß zwischen:

$$a^2+9ab+18b^2, \text{ und } a^2+6ab+9b^2; \text{ so folgt:}$$

$$(a^2+9ab+18b^2) \overset{1}{:} (a^2+6ab+9b^2) : (a+3b), \text{ geht auf; u. s. w.}$$

Rest $3ab+9b^2 = 3b(a+3b)$.

Nro. 9) $\frac{b(a^2+4ab+3b^2)}{2(a^2+2ab+b^2)}$, verfahre wie in 8; so folgt: $\frac{b(a+3b)}{2(a+b)}$

ferner: $\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{a[(a+b)^2-c^2]} =$

$$= \frac{[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]}{a(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{(b+c-a)(a+c-b)}{a}$$

Dritter Abschnitt.

Wurzelausziehung.

§. 3. Quadratwurzeln aus Zahlen, Seite 43.

Nro. 1) 4; $\frac{2}{5}$; $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$; 600.

„ 2) 39; 209; 378; und 1134.

„ 3) 6080; 62,7, und 19,689.

„ 4) 0,494; 0,2124; bei der 3ten Aufgabe folgt 0,075897, und der Rest: 125401.

„ 5) 1,41421 . . .; 17,72004 . . . . und 1,66769 . . . .

„ 6) 0,026683 . . . . und 0,009999 . . . .

„ 7) 200,0601 . . . . und 2342,3001 . . . .

„ 8) 0,96824 . . . . . und 1,749779 . . . .

„ 9) 0,36804 . . . . . und 2,41634 . . . .

„ 10) 0,866025 . . .; dann 0,55777 . . . und 2,92973 . . .

„ 11) 0,74811, ... und 5,63836 . . . .

„ 12) Rechne zuerst $\sqrt{\frac{8}{3}}$, gibt: 1,632993 . . . .; und dann folgt:

$\sqrt{5,632993} = 2,37339$ . . . . .

Nro. 13) Verwandle die Größe $\frac{46}{53}$ in einen Decimalbruch, ziehe ab, und dann ziehe die Wurzel aus; so folgt: 1,7354...

„ 14) 24 Fuß; 609,9 Fuß; 2,055 Zoll und 679,9 Ruthen.

„ 15) 40 Fuß; Nro. 16) 0,5641 Fuß.

§. 5. Quadratwurzeln aus Buchstabenausdrücken, Seite 46.

Nro. 1) $2a^3$, $3ab^4$, $\frac{6a^2x^{-3}}{5y^2}$, $\frac{16x^2y^n}{7z^{3-n}}$.

„ 2) $\frac{3bdfg}{2c^4}$, und $\frac{(a+b)^3}{(a+d)^4}$.

„ 3) $a-2b$, und $3x+x^2$, 4) $2a^2+9ab^2$, und $\frac{3}{2}x^2-y$.

„ 5) $\frac{m}{n}+\frac{1}{3}$, und $\frac{x^2y}{z^3}-\frac{3z^2}{2x^2}$.

„ 6) $a^m-\frac{1}{2}ab^{-3}$, oder: $a^m-\frac{a}{2b^3}$.

„ 7) $\frac{x^2+2a}{3x^3-2x^2}$, und $\frac{4-3z^4}{14-2z^2}$, Nro. 8) $a^2+2ab+b^2$.

„ 9) $4x^4-4x^2y+y^2$, Nro. 10) $32m^2-80m+50$.

„ 11) $a^3-6a^2x^2+12ax^4-8x^6$, Rest $=173ax^{10}$.

„ 12) $\frac{2a^2}{3b^4}-\frac{3b}{4a^2}-\frac{2b}{a}$.

„ 13) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\ldots$, und

$a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}+\frac{b^6}{16a^5}-\ldots$

§. 7. Cubikwurzeln aus Zahlen, Seite 49.

Nro. 1) 12, dann 90, ferner $\frac{2}{7}$ und $\frac{1}{8}$.

„ 2) 38; 163; 3990. Nro. 3) 606 und 1111.

„ 4) 22,04 und 9,71. „ 5) 2,2239 und 0,03035.

„ 6) $\frac{8}{3}$ und 0,35231 ... „ 7) 0,57203 ....

„ 8) 0,79626 und 1,44724... „ 9) 9,8701 .....

„ 10) Seite = 1,70997 Fuß. „ 11) 21,2 Fuß.

„ 12) Durchmesser = 20 Fuß. „ 13) 1718,18 Meilen.

„ 14) „ = 1,2407 Fuß.

§. 9. Cubikwurzeln aus Buchstabenausdrücken, Seite 51.

Nro. 1) a^3, a^2b^6, $5a^nb^4$, und $\frac{2a^{1-n}}{3b^{2m}}$.

" 2) $\frac{bd^{2n}}{10a^2c^3}$, und $\frac{(a+b)^2(b+c)}{2(a-b)(a+c)}$.

" 3) $a-2b$, und $2-2x$, Nro. 4) $\frac{3a^2}{2b}-\frac{4b^2}{3a^4}$.

" 5) $1-2x+x^2$, " 6) $9a-12ax+4ax^2$.

" 7) $a^2-2ab^2+b^4$, " 8) $\frac{7ac^2-2d^3}{2a^2c-2a}$.

" 9) $\frac{1}{a^3}-\frac{3}{a}+3a-a^3$.

" 10) $a+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^6}{9a^5}+\frac{5b^9}{81a^8}+\ldots\ldots$ und:

$1-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}-\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}-\ldots\ldots$

§. 11. Wurzelausziehung im Allgemeinen, Seite 54.

Nro. 1) $\frac{a^2b}{c^3}$, $-\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{a^2}{bdf^n}$, und $\frac{ab^2}{c^{n+1}}$.

" 2) $\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{5}{4}}}$, $\frac{a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{4}{5}}c^{\frac{3}{5}}}{d^{\frac{1}{5}}}$, $-\frac{a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}}g^{\frac{7}{5}}}{2^{\frac{3}{5}}d^{\frac{7}{5}}}$, und $\frac{2^{\frac{3}{4}}.3^{\frac{5}{4}}}{4^{\frac{5}{4}}.7^{\frac{3}{4}}}$;

oder, weil $4=2^2$ ist, $\sqrt[4]{\frac{2^3.3^5}{2^{10}.7^3}}=\frac{3^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{7}{4}}.7^{\frac{3}{4}}}$.

" 3) $\sqrt[4]{a^5}$, $\sqrt[4]{\frac{a^3b^7}{c}}$, $\sqrt[12]{\frac{a^7b^7c^7}{d^7}}$, oder $\sqrt[12]{\left(\frac{abc}{d}\right)^7}$;

ferner $6\sqrt[0{,}52]{a}$; oder $6a^{\frac{100}{52}}=6\sqrt[13]{a^{25}}$, und:

$0{,}3^{\frac{3}{10}}=\sqrt[10]{0{,}3^3}=\sqrt[10]{0{,}027}$.

" 4) $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[12]{3}$, $\sqrt[12]{a}$, $\sqrt[24]{a^2b}$.

" 5) $\sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ oder $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{x^4y}}}$, und $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{ax}}}$.

" 6) 4, ferner 13,719 .... und 1,9041 ....

" 7) 9 und 0,5323. Nro. 8) $1+x$.

" 9) $2a^2-b$. " 10) $2ax-\frac{y^2}{2}$.

Vierter Abschnitt.

Rechnung mit Wurzelgrößen.

§. 2. Addition und Subtraction, Seite 55.

Nro. 1) gibt $11\sqrt{2}$, Nro. 2) $(8a+5)\sqrt[3]{a}$.

„ 3) addirt, gibt: $6\sqrt{2}+2b\sqrt[3]{c^2}-6\sqrt[4]{5}+3\sqrt[3]{5}$;

„ 3) subtrah. „ $2\sqrt{2}-16\sqrt[3]{a}+8b\sqrt[3]{c^2}-6\sqrt[4]{5}-3\sqrt[3]{5}$.

„ 4) $4{,}68\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}+4\sqrt{-1}$ oder $(4{,}68\sqrt{3}+4)\sqrt{-1}$.

„ 5) Addirt, gibt: $1{,}4\sqrt{ab}+5\sqrt[3]{a^2c}+\frac{25}{12}\sqrt[4]{d^3}$, und

„ „ subtrah. „ $-0{,}2\sqrt{ab}-\sqrt[3]{a^2c}+2\sqrt{3b}-17\frac{5}{12}\sqrt[4]{d^3}$.

§. 4. Veränderungen und Verkürzungen, Seite 57.

Nro. 1) $2\sqrt{a}$, $3\sqrt{a}$, $a\sqrt[4]{x}$, $b\sqrt[5]{4y^3}$ und $a\sqrt{\frac{a}{b}}$.

„ 2) $\sqrt[6]{a^6}$, $\sqrt[6]{a^6b^6c^{-6}}$, $\sqrt[6]{a^3x^3}$, $\sqrt[6]{b^2y^{-4}}$ oder $\sqrt[6]{\frac{b^2}{y^4}}$,

und $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}=\sqrt[6]{a^3}$, ferner $\sqrt[6]{40}$.

„ 3) $3\sqrt[4]{8}$, $5a\sqrt[9]{a^4}$, $\sqrt[6]{3a^4}$ und $\sqrt[8]{128}$, oder $\sqrt[8]{2^7}$.

„ 4) $13\sqrt{2}-6\sqrt{3}+10\sqrt{5}$.

„ 5) gibt $\frac{39}{2}\sqrt[3]{6}$, (nämlich $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{6}{8}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$ u. s. w.)

„ 6) gibt 0, (nämlich $\sqrt{\frac{4}{a}}=\sqrt{\frac{4a}{a^2}}=\frac{2}{a}\sqrt{a}$ u. s. w.)

„ 7) $8b^3c\sqrt[3]{2c}$, Nro. 8) $\frac{6}{a}\sqrt{2b}$.

„ 9) (Setze $\sqrt[3]{\frac{x}{c^2}}=\sqrt[3]{\frac{xc}{c^3}}=\frac{1}{c}\sqrt[3]{cx}$ u. s. w.), $\frac{6+c}{x}\sqrt[3]{cx}$.

„ 10) $\frac{3ab}{a^2+b}\sqrt{b}-\frac{2ab(a^2+b)}{(a^2+b)^2}\sqrt{b}=\frac{ab}{a^2+b}\sqrt{b}$.

„ 11) $bc\sqrt{\frac{3ac}{5(a^2-2ab+b^2)}}$, gibt: $\frac{bc}{5(a-b)}\sqrt{15ac}$,

„ „ und $\sqrt{\frac{2a^2b(1-2a+a^2)}{5c(a^4-4a^2c+4c^2)}}=\frac{ac(1-a)}{5(a^2-2c)}\sqrt{10bc}$.

Nro. 12) $\sqrt[5]{\frac{2a(a+b)^3}{3b(a-b)^3}} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \sqrt[5]{\frac{2a}{3b}}$.

§. 6. Multiplication der Wurzelgrößen, Seite 59.

Nro. 1) gibt: 4, dann $-3a\sqrt{b}$, $4a^2b$ und $\sqrt[4]{a^6} = a\sqrt{a}$.

" 2) $2a^3\sqrt[3]{b}$, Nro. 3) $-12\sqrt{c(a^2-b^2)}$, und $7\sqrt{3}$.

" 4) $-6\sqrt{15} - 15 + 90\sqrt{3}$.

" 5) $ab\sqrt{d} + cd\sqrt{b}$.

" 6) $2{,}5\sqrt[3]{4} - 16{,}2\sqrt[3]{2}$; oder auch $\frac{5}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{81}{5}\sqrt[3]{2}$.

" 7) $12a - 6\sqrt[4]{a^3b} + 6\sqrt[4]{ab^3} - 3b$.

" 8) Erste Art; setze $(3\sqrt{-1} + 4\sqrt{3}.\sqrt{-1} + 7\sqrt{2}.\sqrt{-1})$, multipl mit $(2\sqrt{-1} - 5\sqrt{2}.\sqrt{-1} + 2\sqrt{3}.\sqrt{-1})$ u. s. w.

" " 2te Art; setze $\sqrt{-1}$ aus beiden Faktoren als gemeinschaftliche Größe heraus; so folgt:

$$(3 + 4\sqrt{3} + 7\sqrt{2})(2 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}).(\sqrt{-1})^2 =$$
$$= 40 - 14\sqrt{3} + \sqrt{2} + 6\sqrt{6}.$$

" 9) $4\sqrt[6]{2^5} = 4\sqrt[6]{32}$, und $-\frac{6}{a}\sqrt[12]{a^{17}} = -6\sqrt[12]{a^5}$.

" 10) $15x\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$ oder $\frac{15x}{y}\sqrt[6]{xy^5}$.

" 11) Gibt $3\sqrt[6]{\frac{3^6 . 6^3 . 2^4}{2^6 . 9^4}}$, setze nun $6^3 = 2^3.3^3$, und $9^4 = 3^8$; so folgt nach Reduction des Bruches: $3\sqrt[12]{6}$.

" 12) $a\sqrt[12]{\frac{a^7}{b^4}} = \frac{a}{b}\sqrt[12]{a^7b^8}$.

" 13) Gibt: $-6\sqrt[3]{4} - 18 + 12\sqrt[12]{4^7} - 9\sqrt[6]{2^3.4^2}$, und wenn nun $4^7 = 2^{14}$ und $\sqrt[12]{2^2} = \sqrt[6]{2}$ gesetzt wird, so erhält man die Größe: $-6\sqrt[3]{4} - 18 + 6\sqrt[6]{2}$.

Man hätte auch vor der Multiplication statt $\sqrt[4]{4}$ die $\sqrt{2}$ setzen, und den ersten Faktor abkürzen können.

" 14) $a\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{a^3b^4} - \sqrt[6]{a^4b^3} - b\sqrt[6]{b}$.

" 15) Wende Bruchpotenzen an, so folgt:

$$x - \sqrt[6]{x^2y^5} - \sqrt[12]{x^8y^9} + y\sqrt[12]{y^7}.$$

Nro. 16) $4-6\sqrt[6]{48}+6\sqrt[3]{6}-2\sqrt{3}$, (denn $\sqrt[6]{36}=\sqrt[6]{6^2}=\sqrt[3]{6}$, und $\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$). Oder man setze schon anfangs statt $\sqrt[6]{4}$, die $\sqrt[3]{2}$, und multiplicire dann.

„ 17) Erste Auflösung. Durch Multiplication findet man:

$$a\sqrt{a}+2\sqrt[4]{a^3c^2}+c-b\sqrt[3]{b}.$$

2te Auflösung. Setze nach §. 8, *b*, 4, Abschnitt II. die Differenz der Quadrate, nämlich:

$(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt{c})^2-(\sqrt[3]{b^2})^2$ und rechne diese Größe aus!

„ 18) Gibt $\sqrt{2}$, und $\sqrt[6]{(a+\sqrt{b})^7}=(a+\sqrt{b})\sqrt[6]{(a+\sqrt{b})}$.

„ 19) Gibt $\sqrt[4]{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})^2}=\sqrt[4]{(a^2-b)(a+\sqrt{b})}=$
$=\sqrt[4]{(a^3-ab+a^2\sqrt{b}-b\sqrt{b})}$, ferner:

$$\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^4(2+\sqrt{3})^3}=\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})\left[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right]^3}$$
$$=\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})(4-3)^3}=\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})},$$ siehe Absch. II, §. 8, *b*, 4.

§. 8. Division von Wurzelgrößen, Seite 62.

Nro. 1) $\frac{2}{3}$ $\quad 5\sqrt[3]{a}$ und $3b$.

„ 2) $\sqrt{36}:\sqrt{12}=\sqrt{3}$, $\frac{2}{\sqrt{-8}}=\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{-1}}{-2}=$
$=-\frac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{-1}$; ferner $a\sqrt[4]{a^3b}$, und $3\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}$.

„ 3) $6\sqrt[3]{\frac{8}{3}}=4\sqrt[3]{9}$, und $2a\sqrt{b}$.

„ 4) $-\frac{2}{b}\sqrt[3]{ab^3c^3d^3}=-2cd\sqrt[3]{a}$, und $\frac{7a}{2c}\sqrt[4]{b^2c^2d}$.

„ 5) $-\sqrt{3}-\sqrt{2}+4$, und $\sqrt[3]{a}-4\sqrt[3]{ab^2}$.

„ 6) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{a}$, dann 3, (setze $\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$).
Ferner $-5\sqrt[6]{\frac{abc}{f^3}}$, oder $-\frac{5}{f}\sqrt[6]{abcf^3}$.

„ 7) Setze im Dividend die Größe $\sqrt{-1}$ als Faktor, so fällt $\sqrt{-1}$ weg, und es folgt: $-15-25\sqrt{2}+4\sqrt{3}$.

Nro. 8) $\frac{3}{b}\sqrt[4]{ab^2} - \frac{2}{a}\sqrt[6]{a^3b}$.

" 9) $3\sqrt[6]{ac^2} - 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[12]{a^5c^4}$.

" 10) Setze Bruchpotenzen und theile, so folgt: $2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[4]{y}$. Oder setze $4\sqrt[3]{x^4} - 9\sqrt{y} = (2\sqrt[3]{x^2})^2 - (3\sqrt[4]{y})^2$; diese Differenz der Quadrate durch die Differenz $2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[4]{y}$ getheilt, gibt die Summe, wie oben.

" 11) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{ab\sqrt{c}-ad}{b^2c-d^2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$, oder $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$.

" 12) $\frac{8}{7}\sqrt{6} - \frac{4}{7}\sqrt{10}$, $-16+10\sqrt{3}$, und $3+2\sqrt{10}$.

Anmerkung. Das dritte Beispiel kann auch dadurch ausgerechnet werden, daß man zuerst Zähler und Nenner mit $\sqrt{2}$ theilt, wodurch dann

$$\frac{31}{4\sqrt{\frac{5}{2}}-3}, \text{ oder } \frac{31}{2\sqrt{10}-3} \text{ folgt, u. s. w.}$$

Nro. 13) Man erhält im ersten Fall: $\frac{3+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$,

und im 2ten $\frac{(3+\sqrt{2})(7\sqrt{2}+8\sqrt{\frac{1}{2}})}{66} = \frac{22+21\sqrt{2}+24\sqrt{\frac{1}{2}}}{66}$

oder, da $24\sqrt{\frac{1}{2}} = 12\sqrt{2}$ ist; $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$; wie vorher!

" 14) Man erhält $\frac{5\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{5}{9}$, ebenso durch die 2te Auflös.

" 15) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b} = \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$, und:

$$\frac{(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sqrt{-1}}{-18+12} = (3\sqrt{6}-7)\sqrt{-1}$$

" 16) Das erste Beispiel gibt: $\frac{3-\sqrt{7}-\sqrt{2}}{(3-\sqrt{7})^2-2} =$

$$= \frac{3-\sqrt{7}-\sqrt{2}}{14-6\sqrt{7}} \text{ u. s. w.} = \frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{7}+3\sqrt{14}}{28}.$$

Oder $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{2})^2-7}$ u. s. w. gibt dasselbe.

Das 2te Beispiel gibt: $\frac{\sqrt{2}}{5+(3-\sqrt{2})\sqrt{-1}} =$

$$= \frac{5\sqrt{2}-(3\sqrt{2}-2)\sqrt{-1}}{6(6-\sqrt{2})} = \frac{[5\sqrt{2}-(3\sqrt{2}-2)\sqrt{-1}](6+\sqrt{2})}{6\,.\,34}.$$

Man findet nach gehöriger Reduction: $\frac{15\sqrt{2}+5+(3-8\sqrt{2})\sqrt{-1}}{102}$.

Nro. 17) Man erhält: $4\sqrt[4]{\frac{(4-2\sqrt{2})^2}{6-2\sqrt{7}}} = 4\sqrt[4]{\frac{4(3-2\sqrt{2})}{3-\sqrt{7}}}$;

wenn nun der Nenner rational gemacht wird, so folgt:

$4\sqrt[4]{[18-12\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4\sqrt{14}]}$.

Fünfter Abschnitt.

Proportionenlehre.

§. 5. Seite 73.

Nro. 1) $7a$; 2) $x = \frac{m}{2}(a+b)$; 3) $x = bc$.

„ 4) $6a$; 5) $x : y = 7b : 5a$; 6) $c : x = x : \frac{b^2}{a}$.

„ 7) $x^2 = a(a-x)$; hieraus $a : x = x : a - x$.

„ 8) $H : B = 0{,}8533 : 1$; 9) $x = \frac{aB}{A}$; 10) $\frac{Nn}{M}$ Tage.

„ 11) $abf : cd = g : 5m$; 12) Siehe §. 3, *d*.

„ 13) $x : a^2 = b : c^2$.

„ 14) Das 4te Glied ist um 1 zu klein, die Proportion ist daher nicht richtig.

„ 15) $2 : 7 - x = 1 : 3$; oder auch $3 + x : 2 = 2 : 1$.

„ 16) Setze 1tes + 2tes : 2ten = 3tes + 4tes : 4ten, verwechsle dann die beiden äußeren Glieder u. s. w.; so folgt:

$$b + d : d - x = a + b + c + d : c + d.$$

„ 17) $ab^2 : xb = d : \frac{f^3}{a}$, oder $b : x = d : f^3$, $x = \frac{bf^3}{d}$.

„ 18) $x + 3 : x - 2 = 9 : 4$, woraus $x + 3 : 5 = 9 : 5$, daher $x = 6$.

Nro. 19) Setze $a : b = c : d$, und $c : d = g : x$, so ist:
$a : b = g : x$; hieraus $x = \frac{bg}{a}$.

„ 20) $A + B + C : a + b + c = m : n$, oder $= A : a$ u. s. w.

„ 21) $(a + b)(a - b) = (c + x)(c - x)$, daher:
$a + b : c + x = c - x : a - b$.

„ 22) Setze $m : n = b : a$, $n : p = a : d$ und $p : q = f : d$, multiplicire nun die drei Proportionen gliedweise, so folgt:
$m : q = bf : d^2$.

„ 23) Erste Aufl. Man suche aus der 2ten Proportion einen Werth von y und setze diesen Werth in die erste Prop.
2te Aufl. Man multiplicire die beiden Proportionen, so wird in beiden Fällen $x = 1\frac{11}{24}$.

„ 24) 1) $c : a = b : x$, hier ist x die 4te geometr. Proportionale.
2) $a : b = b : x$, „ „ x „ 3te „ „
3) $a : x = x : b$, „ „ x „ mittlere „ „
(Siehe Geometrie I. §. 124, 125 und 126.)

Sechster Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 7. Aufgaben, Seite 88.

Nro. 1) log 31 liegt zwischen 1 und 2, das Mittel ist $\frac{3}{2}$,
$10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1000} = 31,62278 \ldots$, ist zu groß.
Das Mittel zwischen $\frac{3}{2}$ und 1 ist $= \frac{5}{4}$, daher;
$10^{\frac{5}{4}} = \sqrt{\sqrt{100000}} = \sqrt{10\sqrt{1000}} = \sqrt{316,2278} =$
$= 17,7827 \ldots$, ist zu klein; $10^{\frac{11}{8}}$ gibt 23,7137, zu klein;
daher $10^{\frac{23}{16}}$, gibt 27,3842; $10^{\frac{47}{32}}$ gibt $10\sqrt[32]{10^{15}} = 10\sqrt[8]{(1000\sqrt[4]{1000})} =$
$= 29,006 \ldots$, $10^{\frac{95}{64}}$ gibt 30,505 u. s. w.

Bei $10^{\frac{1527}{1024}}$ erhält man: 30,99, der log von 31 ist daher etwas größer als $\frac{1527}{1024}$ oder $> 1,4912$ u. s. w.

(Der wahre log 31 ist $= 1,4913617$.)

Um aus $\log 30$ den $\log 31$ zu finden, setze in die Formel Abschnitt VI. §. 2 die Werthe: $n = 30$, und $x = 1$; so folgt:

$$\log 31 = \log 30 + 0{,}868589 \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{3 \cdot 61^3}\right) =$$

$$= 1{,}4771213 + 0{,}868589(0{,}01639344 + 0{,}00000147).$$

Hieraus $\log 31 = 1{,}4913617$.

Nro. 2) Setze z. B. $10^x = 2{,}7182818\ldots$ (weil diese Zahl = der Basis der natürlichen log. ist).

Wenn nun $2{,}718^n \ldots = z$, oder $(10^x)^n = z$, so ist:

der brigg. $\log z = x \cdot n =$ brigg. $\log 2.7182818 \times$ natürl. log. z.

$= 0{,}4342945 \times$ natürl. $\log z$.

Man muß daher die natürlichen log. mit $0{,}4342945$ multipliciren, um die briggischen für dieselben Zahlen zu erhalten; daher ist $0{,}4342945$ der Modul der briggischen Logarithmen.

Nro. 3) $\log 10a = \log a + \log 10 = 1 + \log a$, ferner:

$\log 100a = \log a + \log 100 = 2 + \log a$ u. s. w.

Wenn nun a irgend eine Zahl bedeutet, so ist $10a$ die 10fache u. s. w., und die Kennziffern der log. dieser Vielfachen sind um 1, 2 .... größer als die Kennziffer des $\log a$, die Mantissen sind aber gleich.

Nro. 4) $\log 0 = -\infty$ (unendlich und negativ) denn:

$$0 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty},$$ daher brigg. $\log 0 = -\infty$.

Nro. 5) Die Basis sei z. B. $\frac{1}{4}$ und man soll $\log 2$ finden, so ist $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2$, $\frac{1}{4^x} = 2$; nur wenn x negativ ist, so kann $\frac{1}{4^x} = 2$ werden, z. B. $x = -\frac{1}{2}$, so ist:

$$\frac{1}{4^{-\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;$$ ebenso für andere Zahlen.

Nro. 6) Man erhält $0{,}6211 - 1$. **Nro. 7)** $0{,}9283832 - 2$.

„ 8) *a*) $\log a + \log b - \log c$; *b*) $2 \log c - (\log 4 + \log d)$;

c) $\log 5 + 3 \log a + 3 \log b - (\log 2 + 4 \log d + 2 \log f)$.

„ 9) $\log x = (3 \log a + 2 \log b - 5 \log c) : 4$.

„ 10) $\log x = \log f + \frac{2 \log a - \log b}{n} + \frac{3 \log (a+b) - 4 \log c}{5}$.

Nro. 11) Die zugehörigen Num. sind folgende:

a^b, $\sqrt[n]{b^c}$, a^5b^7, und $\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^4}}$.

" 12) $x = \frac{a}{b^2}\sqrt[6]{\frac{c^5d^3}{f^8}}$, oder $\frac{a}{b^2}\sqrt[6]{c^5} \cdot \frac{\sqrt{d}}{\sqrt[3]{f^4}}$.

" 13) *a*) 29277,81 . . , . *b*) 3755,92 . . . .

" 14) Man erhält 0,05408967 . . . .

" 15) x = 121800.

" 16) *a*) 156,25; *b*) 7529536; *c*) 0,000001073742....
d) 2,177767; *e*) x = num. zu 0,5(log 3 — log 5), u.s.w;
oder auch $\left(\frac{3}{5}\right)^{0,5} = \sqrt{0,6}$, woraus x = 0,7745965....

" 17) Siehe die Resultate Seite 215 Nro. 3, 4, 5, 7, 9, 11.

" 18) " " " " 216 " 2, 3, 4, 5, 7, 8.

" 19) " " " " 217 " 6 und 7.

" 20) Erste Auflösung log 3195 — log 4 = 2,9024109; um diesen mit 0,591 zu multipliciren, suche nochmals den log von 2,9 . . . . und addire log 0,591; dann suche zweimal den numerus; so folgt: 51,9188.

2te Auflösung. Setze $\sqrt[1000]{798,75^{591}}$ u. s. w.

Nro. 21) $5,087^2$ mit log gerechnet, gibt: 25,87757
$0,19023^2$ " " " " 0,0361874

daher $x = \sqrt[3]{25,9137574} = 2,959217..$

Ferner, rechnet $0,41768^3$ mittelst log, so folgt:

$$x = \sqrt[6]{2,9271330} = 1,196025 \ldots.$$

Nro. 22) Erste Auflösung. Man erhält nach der gewöhnlichen Weise:

$$x = \text{num.}\left[2(\log 4069,1 - \log 639430) + 2 \log 1100 - \log 49\right]$$

Hieraus findet man x = num. log 0 = 1.

2te Auflösung. Setze zuerst $x = \left(\frac{4069,1 \,.\, 1100}{639430 \,.\, 7}\right)^2$ u. s. w.

3te Auflösung; ohne log. erhält man:

$$x = \left(\frac{4069,1 \,.\, 1100}{639430 \,.\, 7}\right)^2 = \left(\frac{447601}{447601}\right)^2 = 1.$$

Bei der 2ten Aufgabe findet man x = 428,215.

Ohne Logarithmen, folgt:

$$x = \frac{856,43}{158} \,.\, 79 = \frac{856,43}{2} \text{ u. s. w.}$$

Nro. 23) In der ersten Aufgabe wird $x = 120$.
〃 〃 2ten 〃 〃 $x = 5$.

〃 24) Erste Auflösung. Nach der gewöhnlichen Weise ist:

$$x = \text{num}\left[\log 10 + 3 \log 279 + \frac{\log 0,531441}{6} - (3 \log 0,31 + 5 \log 90)\right]$$

u. s. w.; woraus $x = 1,11111 \ldots$, oder $x = 1\frac{1}{9}$.

2te Auflösung. Reducire zuerst den gegebenen Ausdruck, wie folgt:

$$x = \frac{10}{90^5}\left(\frac{279}{0,31}\right)^3 \sqrt[6]{0,531441} \text{ u. s. w.}$$

Ohne Logarithmen findet man aus dem vorhergehenden Ausdruck:

$$x = \frac{1}{90^5}(900)^3 \sqrt[6]{531441} = \frac{10^3}{90^2}\sqrt[3]{729} = \frac{10^3 \,.\, 9}{9^2 \,.\, 10^2} = \frac{10}{9}, \text{ wie oben.}$$

Nro. 25) Suche $\sqrt[3]{2}$, addire diese zu 56, suche den log. u. s. w., so folgt: $x = 1,095813 \ldots$.

〃 26) *a*) $x = \frac{0.5837198 - 1}{0,6989700} = \frac{-0,4162802}{0,6989700} = -0,59556.$

Rechnet diese Division mittelst Logarithmen:

b) $x = \frac{\log 3 + \log 8}{\log 3 + \log 8} = 1.$

Oder: Setze $3^x \,.\, 8^x = 3 \,.\, 8$, $(3 \,.\, 8)^x = 3 \,.\, 8$, daher $x = 1$.

Oder: Theile auf beiden Seiten mit 3, so folgt:

$3^{x-1} \,.\, 8^{x-1} = 1$; hieraus $24^{x-1} = 1$, da nun $24^0 = 1$ ist, so muß $x - 1 = 0$, daher auch $x = 1$ sein.

c) Erste Auflösung. Zerlege den Ausdruck mittelst Logarithmen, so folgt: $(2x - 5)\log 4 + (3 - x)\log 0,7 = (x - 1)\log 2$. Rechnet die Produkte aus und ordnet die Gleichung, u. s. w.

2te Auflösung. Setze $\frac{4^{2x} \,.\, 0,7^{-x}}{2^x} = \frac{2^{-1}}{0,7^3}$, oder

$\left(\frac{16}{0,7 \,.\, 2}\right)^x = \frac{1}{2 \,.\, 0,7^3}$, woraus $\left(\frac{8}{0,7}\right)^x = \frac{1}{0,686}$ u. s. w. folgt.

Man erhält $x = 3$.

Nro 27) $x = 3,2739 \ldots\ldots$

Siebenter Abschnitt.

Von den Reihen. Seite 90.

§. 3. Aufgaben über arithmetische Reihen, Seite 97.

Nro. 1) 39 und 77. 2) 49a, denn d ist $= -\frac{10}{9}a$.

„ 3) $a + 29d = 308$, und $a + 18d = 304$,

hieraus $d = \frac{4}{11}$, $a = 297\frac{5}{11}$.

„ 4) $t = 644$. 5) 144 Ziegel. 6) 376,05 Fuß.

„ 7) $a = 40$, $t = 1008$, $n = 122$; suchet d; so folgt die Reihe: 40, 48, 56, 64 u. s. w.

„ 8) Im 21ten Jahre. Nro. 9) $s = 500500$.

„ 10) $t = 150$, $s = 4410$, „ 11) 3924 Ziegel.

„ 12) 6450 fl. „ 13) 3501 fl. 20 kr.

„ 14) $t = 1800$, $d = 50$, $n = 15$, folglich $a = 1100$, und $s = 21750$ fl.

„ 15) Nach Seite 95 Aufgabe 8 ist:

$a = 327$, $d = -32,7$, $t = 0$.

Man findet, daß er in der 11ten Secunde den höchsten Punkt erreicht.

„ 16) $a = 216,35$; $d = 32,7$; $n = 7$, also $s = 2201,15$ Fuß.

Andere Auflösung; durch die Wurfkraft legt er $7 \cdot 200 = 1400$ Fuß zurück, und durch die Anziehung der Erde nach Aufgabe 9 in 7 Secunden: $7^2 \cdot 16,35$. Addiret beides!

Nro. 17) Antw.: Der 12te erhält 90 fl. und alle zusammen 1740 fl.

„ 18) Es sind 23 Reihen, und im Ganzen 529 Bäume.

„ 19) Setze a aus Formel I in Formel II, und suche t; so folgt: $t = \frac{s}{n} + (n - 1)\frac{d}{2}$.

„ 20) $d = \frac{t - a}{n - 1}$, $s = \frac{n}{2}(a + t)$.

„ 21) $d = \frac{(t - a)(t + a)}{2s - (a + t)}$.

„ 22) Man hat: I) $a + 9d = 813$, II) $a + (n - 1)d = 1823$

und III) $(a + 1823)\frac{n}{2} = 141303$;

suche nun aus I) d und setze diesen Werth in II), und aus III) n in die vorhin erhaltene Gleichung; so findet man die Gleichung für a, nämlich:

$$a^2 - 23159{,}6a = - 19836661{,}8,$$

woraus $a = 723$, und $= 27436{,}6$ folgt; behält man nur den ersten Werth bei (weil die Reihe der Angabe nach eine steigende ist), so folgt aus I) $d = 10$, und aus der Gleichung II) $n = 111$.

Nro. 23) $a+7d+a+13d = 44$ und $a+14d+a+18d = 68$; hieraus a und d. Die Reihe heißt 2, 4, 6, 8, 10 ......

„ 24) Nach 11 Tagen.

„ 25) Das Cap. ist $= a$, $d = 50$, $t = 1450$ und $n = 10$. Daher $a = 1000$, also stand es zu 5 Procent.

„ 26) $d = 5$, $s = 2265$, $t = 249$. Hieraus n und a. Man findet, daß der Zeitraum 10 Jahre beträgt, und daß im ersten Jahre desselben 204 Menschen gestorben sind.

„ 27) Suchet zuerst das erste Glied der durch die Addition entstandenen Reihe aus: $3379 = \frac{31}{2}\left(2a + 30 \,.\, 7\right)$, so folgt: $a = 4$; daher das erste Glied der ersten Reihe $= 1$, und das erste der 2ten Reihe $= 3$.

Die beiden Reihen sind: $\begin{cases} 1, & 3, & 5, & 7 \ldots\ldots 61 \text{ und} \\ 3, & 8, & 13, & 18 \ldots\ldots 153 \end{cases}$

„ 28) Der zweite reise x Tage lang, so ist sein Weg $= \frac{x}{2}\left[18 + (x-1)\,1\frac{1}{4}\right]$, und der des ersten $= (x+2) \,.\, 10$, beide sind aber um 7 Meilen unterschieden, hieraus eine Gleichung, so folgt: $x = 8$ Tage. Der erste reiste 10 Tage, und der Ort des Zusammentreffens liegt 50 Meilen von B.

„ 29) Die Seite des ersten sei $= a$, die des 2ten $= a+d$ u. s. w., so ist: I) $s = \frac{4}{2}\left(2a + (4-1) \,.\, d\right) = 4a + 6d = 84$, und II) $a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 + (a+3d)^2 = 1784$.
Aus beiden Gleichungen finde nun a und d.
Die Seiten sind: 18, 20, 22 und 24 Fuß lang.

„ 30) Die Progression habe $2n+1$ Glieder, so ist das mittlere das $n+1$ te Glied, und:

$$s = \frac{2n+1}{2}\left(2a + 2nd\right) = (2n+1)\,(a+nd);$$

$a + nd$ ist aber das mittlere Glied, und $2n+1$ die Anzahl der Glieder, folglich ist der Satz richtig.

Nro. 31) Wenn man von der Summe von n Gliedern die Summe der n — 1 ersten Glieder abzieht, so erhält man das nte Glied u. s. w.

„ 32) 1000 ist hier die Summe der Reihe, $t = 60$, $d = 2$. Sucht man nun aus Formel I) a, und setzt diesen Werth in Formel II), so findet man, daß n imaginär ist; daher ist die Aufgabe unmöglich.

„ 33) Leitet eine allgemeine Formel ab, in welcher n in d, t und s ausgedrückt ist; so wird

$$n = \frac{2t + d \pm \sqrt{[(2t + d)^2 - 8ds]}}{2d} \text{ gefunden.}$$

Wenn nun $(2t + d)^2 < 8ds$ wird, so wird die Größe unter der Wurzel negativ, daher n imaginär.

Es muß daher $(2t + 2)^2$ wenigstens $= 8 . 2 . 1000$ sein, also ist $t = 62{,}245 \ldots$ der kleinstmöglichste Werth.

Setzt man z. B. $t = 64$, so wird $n = 40$, oder $= 25$, wovon der Werth 25 ein positives erstes Glied $= 16$ gibt.

„ 34) Die Ziffern der Zahl seien a, $a + d$, $a + 2d$ u. s. w. Bilde zwei Gleichungen und suche aus ihnen a und d, so folgt die Zahl: 12345.

§. 5. Aufgaben über die geometrischen Reihen, Seite 105.

Nro. 1) $t = 32$, $s = 63$.

„ 2) $t = 655360$, $s = 873810$.

„ 3) $t = \frac{1}{2048}$ oder $0{,}0004882812\ldots$ und $s = 31\frac{2047}{2048}$, oder $s = 31{,}9995117188$, je nachdem man ohne, oder mit Logarithmen rechnet.

„ 4) $t = 4104$, $s = -3800$.

„ 5) Man hat $aq^3 = 4$, also $q^3 = \frac{4}{3}$; folglich, da $aq^{99} = t$ ist,

$$t = 3 . (q^3)^{33} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{33} = 39819{,}7\ldots, \quad s = 159269\ldots.$$

„ 6) Die Reihe ist 10; 11; 12,1 u. s. w. $a = 10$, $q = 1{,}1$, und $n = 9$, (weil er 8mal verstärkt wurde), daher:

$t = 21$ Pfund 14 Loth.

„ 7) $\frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$. 8) $a = 2$. 9) $40\frac{1}{2}$.

Nro. 10) $\frac{7143}{9999}$, oder $\frac{2381}{3333}$.

" 11) $a = 1$, $q = 2$, $n = 64$, daher $s = 18446744$ Billionen Körner (ungefähr).

Dies sind ungefähr 11 Billionen Badische Malter.

" 12) $a = 1$, $q = \frac{3}{2}$, $n = 32$. Man findet 862880 Pfennige, oder 3595 fl. 20 kr. (4 Pfg. = 1 Kzr.).

" 13) Gehalt der ersten Mischung $= \frac{1}{9}$ (nämlich unter 9 Schoppen ist 1 Schoppen von der Flüssigkeit), Gehalt der zweiten $= \frac{1}{9}$ des Gehalts der ersten u. s. w.

Der Gehalt der letzten ist $= \frac{1}{9^{10}}$, also sind in 9 Schoppen 0,0000000026 .... Schoppen der Flüssigkeit enthalten.

" 14) Die Dichtigkeit ist nach dem ersten Zuge $= \frac{9}{11}$ u. s. w. Man erhält $t = 0{,}01 = \left(\frac{9}{11}\right)^n$, woraus folgt, daß 23 Kolbenzüge nöthig sind.

" 15) Setze $0{,}31 + 0{,}007 + 0\,0007 + \ldots\ldots$, so folgt als Summe der Reihe: $\frac{7}{900}$, daher ist der Bruch $= \frac{286}{900} = \frac{143}{450}$.

" 16) Die geometrische Reihe fängt erst mit dem Gliede $\frac{2}{a^2}$ an; die Summe ist $= 1 + \frac{2}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$.

Stellet die Reihe wieder dar durch Division!

" 17) Aus Formel II folgt: $n = \frac{\log(sq - s + a) - \log a}{\log q}$.

" 18) Der Quotient derselben sei $= q$, so ist: $3 \cdot q^{12} = 5$, $q = \sqrt[12]{\frac{5}{3}} = 1{,}04348\ldots$, daher heißt die neue Reihe: 3; 3,13044 u. s. w.

" 19) Nach dem ersten Abzapfen sind noch 99 Maaß Wein, nach dem zweiten noch $99 - \frac{99}{100} = \frac{99^2}{100}$ u. s. w. in dem Fasse, also nach dem letzten (oder n ten) Abzapfen noch $\frac{99^n}{100^{n-1}}$.

Der zuletzt noch im Fasse befindliche Wein ist daher $\frac{99^n}{100^{n-1}} \cdot 48$ kr. werth, es sind aber zuletzt 100 Maaß Wein und Wasser zu 32 kr. im Fasse, daher: $100 \cdot 32 = \frac{99^n}{100^{n-1}} \cdot 48$; hieraus $0{,}99^n = \frac{2}{3}$.

Man findet, daß er 40mal abzapfen darf.

Nro. 20) Der erste habe n mal verloren, so setzte er das letztemal (im n + 1 ten Spiele) $0{,}6 \cdot 2^n$ fl., der andere setzt eben so viel; daher $2 \cdot 0{,}6 \cdot 2^n = 1228{,}8$. Hieraus $n = 10$. Er verlor daher zehnmal.

Der erste verliert in den 10 Spielen 613,8 fl., und gewinnt im 11 ten Spiel 614,4 fl.; daher ist sein reiner Gewinn = 36 kr., welche der 2te verliert.

„ 21) Die erste Aussaat ist 3, die erste Ernte 18, daher
„ 2te „ „ 6, „ 2te „ 36 u. s. w.

Die Summe von n Aussaaten + 771 ist dann = der letzten (n ten) Ernte. Man findet 7 Jahre. (Setze hierbei $18 \cdot 2^{n-1} = 9 \cdot 2^n$.)

„ 22) Er wird diesen Ort nie erreichen, (2^n wird negativ).

Wenn sich der Körper unendlich lange fortbewegt, so legt er nur

$$\frac{60}{1 - \frac{5}{6}} = 360 \text{ Fuß zurück.}$$

„ 23) Man denke sich 18, 24 und 32 .... als das 4te, 5te und 6te Glied einer geometrischen Reihe (denn der Quotient $\frac{24}{18}$ ist $= \frac{4}{3}$, und $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$ ....) und schalte nun zwischen je 2 Glieder 3 neue ein.

Man findet für $4\frac{1}{4}$ die Wirkung 19,34226 ... u. s. w. oder der Quotient der neuen Reihe ist = 1,07457.

„ 24) Sie sei $= a + aq + aq^2 + , \ldots\ldots aq^8 + aq^9$; so ist $a + aq^2 + aq^4 + aq^6 + aq^8 = 3069$ und
$aq + aq^3 + aq^5 + aq^7 + aq^9 = 6138$.
Theilet die zweite Gleichung durch die erste, so folgt $q = 2$.
In die Summenformel substituirt, gibt $a = 9$ u. s w.

„ 25) I) $a + aq + aq^2 + aq^3 = 40$.
II) $aq^8 + aq^9 + aq^{10} + aq^{11} = 262410$.
Theile II durch I; so folgt $q = 3$, und aus I) $a = 1$.
Daher ist die Reihe 1, 3, 9, 27 .... 177147.

§. 7. Aufgaben über Zinseszinsrechnungen, Seite 110.

Nro. 1) 1200 fl. $15\frac{1}{3}$ Krz. 2) Um 814 fl. 12 kr.

" 3) Es wächst zu 25205,22 fl. an. Die Zinsen und Zinseszinsen betragen daher 18005,22 fl., die Zinseszinsen oder die Zinsdifferenz aber: 8771 fl. 13 kr.

" 4) Der Holzbestand wächst nur um 1 Procent; man erhält: 35044,1 . . . . . Klafter.

" 5) Capital = 37120 fl. 6) 84887 Menschen.

" 7) Antw. $\frac{1800}{1,04^3} + \frac{1000}{1,04^5} = 2422$ fl. 7 Kzr.

" 8) A bietet 12500, B 6000 + 6325,55 oder 12325 fl. 33 kr. und C 13150 fl. 50 kr. in baaren Werthen; also hat C am meisten geboten.

" 9) Man findet p = 1,06 . . .; also trug dasselbe 6 Procent.

" 10) $16765 = 7441 \cdot p^{10}$. Es trug 8,46 . . . Procente.

" 11) Das angewachsene Capital muß = 18900 fl. sein, wenn es 756 fl. Zins tragen soll; hieraus findet man, daß es sich um beinahe $4\frac{2}{5}$ Procent jährlich vermehrte.

" 12) 9,326 Procent.

" 13) $2 = p^{\frac{341}{24}}$; daher zu 5 Procent.

" 14) 56 Jahre und 5 Monate.

" 15) p = 1,02. Noch 10 Jahre lang.

" 16) Die 5000 fl. geben, zu 5 % capitalisirt, eine Summe von 100000 fl, daher:

$1000 \cdot 1.05^n = 100000$, $n = 94{,}3$; also kann die Anstalt im Jahre 1870 errichtet werden.

" 17) $3a = a \cdot 1{,}05^x \cdot 1{,}04^x$.

Man findet, daß es 12,4 Jahre zu 5, und eben so lange zu 4 % ausgeliehen war.

" 18) Man erhält aus $s = ap^n$ folgende 3 Formeln:

$$a = \frac{s}{p^n}, \quad p = \sqrt[n]{\frac{s}{a}}, \text{ und } n = \frac{\log s - \log a}{\log p}.$$

" 19) Suche das angew. Cap. von 20000 fl. zu 4 % in 10 Jahren, dann ziehe 15000 ab, so folgt: 14604,85 als neues Capital. Dieses wächst zu $14604{,}85 \cdot 1{,}045^5 \cdot 1{,}0375^2$ an.
Er hatte zuletzt: 19590 fl. 56 Kzr.

Nro. 20) Der Zinsfuß für $\frac{1}{2}$ Jahr sei $= x$; so muß $x^2 = 1{,}05$ sein; denn das Capital ist am Ende des ersten halben Jahres $= a \,.\, x$ und am Ende des zweiten $= a \,.\, x^2$.

Man findet 2,4695 Procent für $\frac{1}{2}$ Jahr und 0,4074 % für einen Monat.

„ 21) Man erhält $1000 \,.\, 1{,}01^{24}$ (6 Jahre = 24 Vierteljahre). Die angewachsene Schuld ist 1269 fl. 41 kr.

Bei 4 % jährlich wäre dieselbe = 1265 fl. 19 kr., also um 4 fl. 25 kr. kleiner als im ersten Falle.

„ 22) $3000 \,.\, 1{,}05^n = 2500 \,.\, 1{,}04^{10}$.

Man findet 4 Jahre $3\frac{3}{5}$ Monate.

„ 23) $p^{10} = \frac{5}{4}$, also $p^5 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, und

$$s = 15000 \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{5} = 16770 \text{ Menschen.}$$

„ 24) Das erste Capital sei $= x$, so ist das 2te $= x + 5000$. Der Zuwachs beider ist:

$$x \,.\, 1{,}04^{10} - x = (x + 5000)\,1{,}03^{10} - x - 5000.$$

Man findet das erste Capital = 12613,5 fl., und das zweite = 17613,5 fl.

„ 25) $a \,.\, 1{,}05^x = a \,.\, 1{,}045^{x+3}$. Hieraus $\left(\frac{1{,}05}{1{,}045}\right)^x = 1{,}045^3$.

Das erste Capital war $27\frac{2}{3}$, und das zweite $30\frac{2}{3}$ Jahre lang ausgeliehen.

§. 10. Aufgaben über die Rentenrechnung, Seite 118.

Nro. 1) Die angewachsene Summe ist = 16533 fl.

„ 2) Nach gehöriger Reduction folgt:

$$a = 25000000 - \frac{25000000}{1{,}04^{25}} = 15622068 \text{ fl.}$$

„ 3) Mit einem Capital von 2322 fl.

„ 4) Der baare Werth ist = 7992 fl. 48 kr.

„ 5) $x = 100 \,.\, 1{,}03^{30} + 2000(1{,}03^{30} - 1) = 3097$ fl 14 kr.

„ 6) $3600 \,.\, 1{,}04^{12} - 6250(1{,}04^{12} - 1)$ u. s. w. = 2007 fl. 16 kr.

„ 7) $206{,}4 = r(1{,}04^8 - 1)$; $r = 560$ fl.

Nro. 8) $13000 \cdot 1{,}025^{10} = 40r(1{,}025^{10} - 1)$ u. s. w.

Man findet, daß jährlich 1485 Klafter geschlagen wurden.

„ 9) Erste Auflösung. Rechne die Summen, bis zu welchen das Vermögen und die weggenommene Rente angewachsen wären, und setze beide gleich.

2te Auflösung. Er hat jährlich die 3200 fl. Zinsen und noch einen Theil des Capitals verbraucht. Wenn nun vom Capital noch jährlich r fl. weggenommen wurden, so beträgt dies in 20 Jahren $25 \cdot r(1{,}04^{20} - 1) = 80000$.

Man findet, daß er jährlich ungefähr 5886 fl. ausgegeben hat.

„ 10) Man erhält $0{,}6915 \cdot 1{,}04^{n} = 1{,}04^{n} - 1$ u. s. w.; $n = 30$ Jahre.

„ 11) Man hat $s = ap^{n} \pm \frac{r(p^{n} - 1)}{p - 1}$; hieraus ergibt sich:

$$n = \frac{\log\left[s(p-1) \pm r\right] - \log\left[a(p-1) \pm r\right]}{\log p}.$$

(Das Zeichen + gilt für den Fall, daß r zugelegt, und das Zeichen — für denjenigen, in welchem r weggenommen wird.)

„ 12) Rechnet n entweder unmittelbar, oder aus der in der vorhergehenden Aufgabe erhaltenen Formel; so folgen: 8 Jahre.

„ 13) Erste Auflösung. In Formel Aufg. 11 ist $a = 0$, $r = 1000$, $s = 60000$ und $p = 1{,}045$; daher:

$$n = \frac{\log 3700 - \log 1000}{\log 1{,}045}, \text{ u. s. w.}$$

Zweite Auflösung. Nach Formel (A) ist $r = 1000$, $p = 1{,}045$, $s = 60000$; hieraus $1.045^{n} = 3{,}7$ u. s. w. Man findet, daß der Neubau nach 29 Jahren $8\frac{1}{2}$ Monaten statt finden kann.

„ 14) In 7 Jahren ist der Zehnten abgelöst.

„ 15) Erste Auflösung. Wende Formel Aufg. 11 an!

2te Auflösung. Der baare Werth von n Renten ist = 43225 fl.; suche nun n, so folgen 30 Jahre.

„ 16) Wenn B jährlich r fl. erhält, so beträgt deren Werth am Ende des 20ten Jahres $20r(1{,}05^{20} - 1)$.

B hat aber $10000 \cdot 1{,}05^{20} - 8000$ fl. zu erhalten; hieraus eine Gleichung, so findet man 560 fl. 24 kr. Rente, oder in baarem Capital 6983,7 fl.

Nro. 17) Erste Auflösung. Es sollen jährlich r Klafter gefällt werden, so würden diese in 19 Jahren zu

$$\frac{300}{7} \cdot r\left[\left(\frac{307}{300}\right)^{19} - 1\right]$$

Klafter angewachsen sein.

Hiezu noch den wirklichen Holzbestand 15000 addirt, gibt die Masse, bis zu welcher die 18000 Klafter in 31 Jahren angewachsen wären.

Man erhält hieraus eine Gleichung, welche sich auf folgende reduciren läßt:

$$r\left[\left(\frac{307}{300}\right)^{19} - 1\right] = 420\left(\frac{307}{300}\right)^{31} - 350.$$

Man findet den jährlichen Holzhieb = 924,72 ... Klafter.

2te Auflösung. Der Holzbestand ist jetzt $= 18000 \cdot \left(\frac{307}{300}\right)^{12}$, oder 23739,84 welche 553,93 Klafter jährlichen Zuwachs geben. Wird nun dieser jährlich geschlagen, so können außerdem noch so viele Klafter geschlagen werden, daß in 19 Jahren der Holzbestand sich um 23739,84 — 15000, also um 8739,84 Klafter vermindert; daher: $\frac{300r}{7}\left[\left(\frac{307}{300}\right)^{19} - 1\right] = 8739{,}84$;

woraus $r = 370{,}798$.

Es können daher jährlich 553,93 + 370,798; oder 924,72 ... Klafter geschlagen werden; (wie früher).

Nro. 18) Am Ende des 5ten Jahres hat er $\frac{48(1{,}03^5 - 1)}{0{,}03}$, oder 254 fl. 50 kr. in der Sparkasse; es bleiben also nach Wegnahme der 200 fl. noch $54\frac{5}{6}$ fl. darin.

Zu diesen kommen jährlich in den weiteren 5 Jahren die Zinsen der beiden Capitalien, also 60 fl.; er hat daher an die Casse zu fordern $54\frac{5}{6} \cdot 1{,}03^5 + 2000(1{,}03^5 - 1)$ u. s. w.

Das Vermögen ist am Ende des 10ten Jahres = 1782 fl. 7 kr.

" 19) Wenn alle Zahlungen auf baaren Werth reducirt werden, so folgt: $x = \frac{1000}{1{,}04^4} + \frac{1000}{1{,}04^7} + \frac{12500(1{,}04^6 - 1)}{1{,}04^{16}}$.

Man erhält 3385 fl. 26 kr.

Nro. 20) Die Zunahme beträgt $\frac{100}{28} - \frac{100}{36} = \frac{50}{63}$ auf 100; daher $p = \frac{127}{126}$. Man findet $40\frac{3}{4}$ Jahre.

„ 21) Man findet die Gleichung:

$$15000 . 1{,}04^x = 20000 + \frac{700(1{,}035^x - 1)}{0{,}035},$$

woraus $3 . 1{,}04^x = 4 . 1{,}035^x$, oder $\left(\frac{1{,}04}{1{,}035}\right)^x = \frac{4}{3}$.

Das Capital wurde 59,7... Jahre verzinst, und eben so oft die Rente bezogen.

„ 22) Man findet, daß 10,47 ... Zahlungen statt finden müßten. Nimmt man nun an, die Schuld soll durch 10 Zahlungen abgetragen werden, wovon jede 2000 fl., die letzte aber einen Rest betragen soll; so hat man:

$$16000 . 1{,}05^{10} - 40000(1{,}05^{10} - 1) = \text{Rest} = 906 \text{ fl. } 32 \text{ kr.}$$

Am Ende des 10ten Jahres müssen daher 2906 fl. 32 kr. abgetragen werden.

„ 23) Das Capital ist in 11 Jahren = 27365,43 fl. Die 10 Zahlungen von 2000 fl. betragen am Ende des 10ten Jahres 25155,79, also am Ende des 11ten 25155,79 . 1,05 = 26413,58 fl. Folglich müssen noch 951 fl. 51 kr. am Ende des 11ten Jahres bezahlt werden.

Andere Aufl. Der Schuldrest beträgt nach der Aufg. 22 am Ende des 10ten Jahres noch 906 fl. 32 kr., und dieser wächst bis Ende des 11ten, also in 1 Jahr zu 951 fl. 51 kr. an, wie oben.

„ 24) Die Gleichung ist, (wenn x den Zinsfuß bezeichnet):

$$5000 . x^{12} = \frac{560(x^{12} - 1)}{x - 1},$$

welche nach gehöriger Reduction auf folgende gebracht wird:

$$125x + \frac{14}{x^{12}} = 139.$$

Diese Gleichung kann nun nur versuchsweise aufgelöst werden. Man nehme nun z. B. x = 1,04, so folgt:

130 + 8,7743 = 138,7743, also nicht = 139.

Nimmt man nun x = 1,045, so folgt:

130,625 + 8,255 = 138,88, liegt näher an 139 als der für 1,04 erhaltene Werth. Nimmt man nun x = 1,05, so folgt:

131,25 + 7,7957 = 139,0457,

1,05 ist also um ein Geringes zu groß.

Nimmt man nun 1,049, so folgt: 139,0103, und da dieses zu groß ist, so nehme x = 1,0485 . . . ; dann folgt: 138,9931 . . . . daher liegt x zwischen 1,049 und 1,0485,

d. h. die Rente wurde ungefähr zum Zinsfuß

$$\frac{1{,}049 + 1{,}0485}{2} = 1{,}04875,$$

oder zu $4\frac{7}{8}$ % berechnet.

Um die Probe zu machen, setze $x = \frac{100 + 4\frac{7}{8}}{100}$ in die Gleichung, und suche wie groß die Differenz ist!

Nro. 25) Man findet auf ähnliche Weise wie in **Nro. 24**, daß $3\frac{1}{2}$ Procent bezahlt wurden.

„ **26)** Man erhält die Summe **9621** fl. **47** kr. (Nach §. 9. *a.*)

„ **27)** $s = \frac{200(1{,}045^{10} - 1)}{1{,}045^{\frac{1}{4}} - 1} = 9994$ fl. 55 kr. (nach Formel E. §. 9. *a.*)

Oder: die Reihe der angewachsenen Summen ist; wenn der Zinsfuß = p ist:

$$200 \,.\, p^{\frac{39}{4}} + 200 \,.\, p^{\frac{38}{4}} + \ldots\ldots + 200p^{\frac{1}{4}} + 200.$$

Die Reihe hat 40 Glieder, nimmt man 200 als das erste an, so ist der Quotient $= p^{\frac{1}{4}}$ u. s. w.

Andere Auflösung. Der Werth der Vierteljahresbesoldungen beträgt am Ende eines jeden Jahres:

$$200 \,.\, 1{,}045^{\frac{3}{4}} + 200 \,.\, 1{,}045^{\frac{1}{2}} + 200 \,.\, 1{,}045^{\frac{1}{4}} + 200 =$$

$$= \frac{200(1{,}045 - 1)}{1{,}045^{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{9}{0{,}011065} = 813{,}375 \text{ fl.},$$ daher

ist der Werth der 10 Summen am Ende des 10ten Jahres:

$$= \frac{813{,}375(1{,}045^{10} - 1)}{0{,}045}$$ u. s. w.

Nro. 28) Rechne **S** nach §. 9 und discontire, so folgt: **376** fl. **40** kr.

„ **29)** Verfahre nach §. 9, *b*, so ergibt sich die Summe: **1222** fl. 45 kr.

B. Resultate der Aufgaben über Gleichungen.

Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 2. Gleichungen ohne Text, Seite 127.

Nro. 1) 7, $18\frac{1}{2}$ und 2.

„ 2) 11, und 2.

„ 3) $x = \frac{c}{a+b}$, und $x = \frac{n-q^2}{m^2-p}$.

„ 4) 12, und $\frac{abc}{d(a+b)}$, ferner $x = 1$.

„ 5) 10, Nro. 6) 0,24507 . . . . .

„ 7) Zuerst multipl., dann ist $x = -29$.

„ 8) Multipl. und reducirt, so ist $x = \frac{a(b+2c)}{b+2c} = a$.

„ 9) Hauptnenner $= a^2 - b^2$, daher $a(a-b) + x(a+b) = a^2 + bx$, hieraus $x = b$.

„ 10) $2(3+x^2)+10(5-2x) = -x(5-2x)$; gibt: $x = \frac{56}{15}$.

„ 11) Hauptnenner 36, gibt $x = 36$.

„ 12) Zuerst multipl., dann mit 6 multipl. u. s. w. $x = -1,1$.

„ 13) Theilet mit x^n, so folgt: $ax - b = c(1-x)$, $x = \frac{b+c}{a+c}$.

„ 14) $x = 6$, und $x = 2a$.

„ 15) $(x+5)(13-x) - 5(x-7)(13-x) = (4x-40)(x-7)$; $x = 10$.

„ 16) Potenzirt, so folgt: $x = 0,1$.

„ 17) Generalnenner $= 36b^2 - x^2$; $x = \frac{3ab}{a+6b}$.

§. 4. Gleichungen mit Wurzelgrößen, Seite 130.

Nro. 1) $x = 32$, und $x = \frac{c^2 d^2}{a^2} - b$.

„ 2) $x = 6$, und $\frac{b^2 - ac^2}{2bc}$, oder $\frac{b}{2c} - \frac{ac}{2b}$.

„ 3) Gibt $x = 2$; und $24 + x = 4 + 4\sqrt{x} + x$, hieraus $5 = \sqrt{x}$, $x = 25$.

„ 4) Quadrirt, gibt: $27 + 12\sqrt{3x} + 4x = 4x + 28$, hieraus: $12\sqrt{3x} = 1$, $x = \frac{1}{432}$.

Ferner: $(-3c\sqrt{ax})^2 = (2a - 5a\sqrt{b})^2$; $x = \frac{a(4 - 20\sqrt{b} + 25b)}{9c^2}$.

„ 5) $a(\sqrt{x} + \sqrt{a}) = b(\sqrt{x} - \sqrt{a})$ gibt:

$(a-b)\sqrt{x} = -(a+b)\sqrt{a}$, $x = a\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$,

und ebenso findet man: $x = 46\frac{17}{18}$.

Anmerkung.

Wenn der Werth von x geprüft werden soll, so muß $\sqrt{2x} = \sqrt{\frac{845}{9}}$ negativ angenommen werden, weil in der Gleichung die Größe $3\sqrt{2x} = -13\sqrt{5}$ war; ebenso bei ähnlichen Aufgaben.

„ 6) $a^2x^2 - b^2 = (ax+b)^2$. Man erhält $x = -\frac{b}{a}$.

„ 7) Quadrirt gibt $3(x-1)(x+5) = (4+4\sqrt{3x}+3x)(x-1)$, mit $x-1$ getheilt, reducirt, die Wurzel allein auf eine Seite gebracht und nochmals quadrirt; so folgt $x = \frac{121}{48}$.

„ 8) Ziehet die Quadratwurzel aus, so folgt: $x = -\frac{4}{3}$.

§. 7. Aufgaben mit Text, Seite 137.

Nro. 1) Die Zahl heißt 7. Nro. 2) A hat 390 und B 340 fl.

„ 3) „ „ „ 30. „ 4) Die Seite ist = 10.

„ 5) B habe x fl. Man findet B = 1000, A = 1400, C = 1700 fl.

Löset diese Aufgabe auch ohne Gleichung!

„ 6) Die Zahl ist = 3.

„ 7) 50 ℔ Schwefel, 50 Kohle und 300 Salpeter.

Nro. 8) Die 4 Theile sind 17, 22, 30 und 11.

„ 9) Von der Zahl 30. Nro. 10) Die Zahl 40.

„ 11) Die Baarschaft sei $= x$, so ist $x - 30 - 50 = \frac{x}{3}$, hieraus $x = 120$ kr., oder 2 fl.
(Auch ohne Gleichung zu lösen!)

„ 12) 20000 Maaß, oder 20 Fuder. Nro. 13)—140.

„ 14) Die Zahl ist $= 60$

„ 15) 5400 fl. (Auch ohne Gleichung!)

„ 16) A habe x fl. verzehrt, so erhält man:

$$x + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{x}{2} = 13\frac{1}{2}, \text{ woraus } x = 3;$$

also hat A 3, B und C $4\frac{1}{2}$, und D $1\frac{1}{2}$ fl. verzehrt.

„ 17) Die Zahl ist $= 20$.

„ 18) Die Zahl ist $= 2$.

„ 19) Es seien x ℔, so ist: $30 + \frac{x - 30}{2} + 100 = x$;

oder $x - (30 + \frac{x - 30}{2} + 100) = 0$. Hieraus $x = 230$ ℔.

„ 20) Der Einsatz sei $= x$, so bleiben ihm noch $\frac{36x - 200}{2}$ übrig; bildet nun die Gleichung, so folgt $x = 7$ fl.

„ 21) Antwort 3.

„ 22) Die Baarschaft sei $= x$ kr., (verwandle alle Angaben in Kreuzer!). $x = 8$ fl.

„ 23) 300.

„ 24) Der erste sei x, so ist der zweite $= 500 - x$ u. s. w.; man findet die 2 Zahlen 200 und 300.

„ 25) Der reichere habe x fl., so ist: $\frac{x}{3} + \frac{x - 1200}{4} = 2850$.
Man findet hieraus, daß sie 5400 und 4200 fl. haben.

„ 26) Man erhält folgende Prop.: $51 + x : 51 - x = 9 : 8$, aus dieser läßt sich die Gleichung bilden. $x = 3$.

„ 27) A hat 620 und B 1340 fl.

„ 28) Die erste Differenz muß sich zur 2ten verhalten, wie diese zur 3ten; bildet dann die Gleichung, so folgt $x = 30$.

„ 29) Antwort: zu der Zahl 6.

Nro. 30) Das Malter Frucht sei x fl. werth; so muß sich der erste Lohn zum 2ten verhalten, wie 30 : 24 oder 5 : 4.
Hieraus x = 7 fl.

„ 31) 52 und 28. (Löset diese Aufgabe auch ohne Gleichung!)

„ 32) Es seien x ℔ von der ersten, so sind die Reste $= \frac{x}{2}$ und $= \frac{3(190 - x)}{4}$; hieraus eine Proportion u. s. w., so folgt: x = 90, daher beträgt die zweite Sorte 100 ℔.

„ 33) A erhalte x, so erhält B $\frac{5x}{3}$ u. s. w. Man findet, daß A 180, B 300 und C 320 fl. erhält.
(Löset diese Aufgabe auch ohne Gleichung!)

„ 34) Die 3 Theile seien A, B und C, und der erste sei = x, so verhält sich x : B = a : b, x : C = a : c, hieraus:

$$x + \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} = s, \quad A = \frac{as}{a+b+c}, \quad B = \frac{bs}{a+b+c},$$

$$C = \frac{cs}{a+b+c}.$$

„ 35) Antwort $\frac{(a+b)n+b}{1+2n}$, $\frac{a-b}{1+2n}$ und $\frac{n(a-b)}{1+2n}$.

„ 36) Von der ersten x, von der 2ten x — 20; suche nun zwei Ausdrücke für die aus beiden Sorten gelösten Summen, beide zusammen sind dann = 4280 kr.
Von der ersten Sorte verkaufte er 100, und von der 2ten 80 ℔.

„ 37) x Kronenthaler, 48 — x Preuss. Thlr.; ihre Werthe sind $\frac{27}{10}x$ und $(48 - x)\frac{7}{4}$ u. s. w. Man findet 20 Krthl. und 28 Preuss. Thlr.

„ 38) Der Gehülfe 54 kr. und der Lehrling 30 kr.

„ 39) Es seien x Schoppen Wein, so ist dieser 10x Krzr., und die Mischung (x + 80) . 8 Kreuzer werth u. s. w. Hieraus eine Gleichung, aus welcher x = 320 folgt.

„ 40) 50 ℔. (Löset diese Aufgabe auch ohne Gleichung!)

„ 41) Es sind jetzt 16 ℔ Zinn und 8 ℔ Blei, setzt man nun den Zinnzusatz = x; so folgt: 16 + x : 8 = 7 : 2, x = 12.
Oder die Abnahme des Bleies sei = x, so ist:

$$16 : 8 - x = 7 : 2; \quad x = 3\frac{3}{7};$$

es muß daher entweder 12 ℔ Zinn dazu, oder $3\frac{3}{7}$ Blei weg.

Nro. 42), 43) und 44) geben folgende Resultate:

Entweder müssen $\frac{bc - ad}{d}$ ℔ des ersten Stoffes dazu, oder $\frac{bc - ad}{c}$ vom 2ten hinweg, oder $\frac{bc - ad}{c + d}$ ℔ vom ersten zugesetzt und vom 2ten Stoff weggenommen werden.

„ 45) Man erhält: 1) $x = \frac{8 . 7 - 16 . 2}{2} = 12$; und

2) $\frac{8 . 7 - 16 . 2}{7} = x = 3\frac{3}{7}$ ℔.

„ 46) Antwort: 24 Loth Kupfer.

„ 47) Das Cap. sei $= x$, so hat man: 100 fl. geben 4 Zins. 1 fl. gibt $\frac{4}{100}$ fl. Zins; daher geben x fl. Capital: $\frac{4x}{100}$ fl. Zins. Der Zins und das Capital sind zusammen $= 8320$ u. s. w. Man erhält das Capital $= 8000$ fl.

„ 48) 1000 fl.

„ 49) 100 in 1 Jahr $\frac{9}{2}$, also 500 in x Jahr $\frac{9 . x . 5}{2}$.

Dieser Zins ist aber $= 67\frac{1}{2}$ fl. u. s. w.; $x = 3$ Jahre; oder benutze die Formel §. 4 Seite 3.

„ 50) 100 geben in 52 Wochen x fl. Zins, daher

20 „ „ 6 „ $\frac{x . 20 . 6}{100 . 52}$ Zins u. s. w. (oder nach Seite 3.)

Man findet, daß die Zinsvergütung $173\frac{1}{3}$ Proc. beträgt.

Löset die Aufgaben 47, 48, 49 und 50 auch ohne Gleichung!

„ 51) Wie Nro. 47. Die 2 Cap. sind x und $x + 5000$. Man findet 14000 fl. zu 5 % und 19000 zu 4 %.

„ 52) 600 fl. zu x % geben 6x Zins, und 1000 fl. zu $x - \frac{1}{2}$ % geben $10\left(x - \frac{1}{2}\right)$ Zins u. s. w.

Man findet 5 Procent und $4\frac{1}{2}$ Procent.

„ 53) A habe x, und B $900 - x$ fl. zu erhalten, beide Summen stehen im gleichen Verhältniß wie die Produkte aus der Zahl der Arbeiter in die Zeit u. s. w.

A erhält 480 und B 420 fl.

2te Aufl. Für die 25 Arbeiter muß in 24 Tagen der 25 . 24 fache Taglohn, und für die andern der 15 . 35 fache Taglohn bezahlt werden; man suche nun 2 Ausdrücke für den täglichen Lohn und setze diese gleich.

Ohne Gleichung läßt sich die Aufgabe durch die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung lösen; oder auch auf folgende Art: Der erste Meister hat für 24 Tage 600, und der 2te für 15 Tage 525 Arbeitstage Lohn anzusprechen: zusammen also beide 1125 Tage, wofür 900 fl. bezahlt werden, also ist der Taglohn $= \frac{900}{1125} = \frac{4}{5}$ fl. A erhält also für 600 Tage $600 . \frac{4}{5}$ fl. = 480 fl., und B für 525 Tage $525 . \frac{4}{5} = 420$ fl., wie oben.

Nro. 54) Gewinn = x gesetzt. Man erhält 978 fl.

„ 55) Eine halbe Stunde später.

„ 56) (Siehe §. 6 Aufg. 3). 18 Minuten.

„ 57) Setze die Summe der Wege, welche beide zurücklegen, = 1750. Man findet daß der erste 225 Sekunden braucht, und daß sie 675 Fuß von A entfernt zusammentreffen.

„ 58) Der 2te lege in 1 Sek. x Fuß zurück. Suche nun zwei Ausdrücke für die Zahl der Sekunden, welche beide brauchen, der Unterschied dieser ist = 540 (nämlich 9 Minuten). Man findet x = 36,68.

Ohne Gleichung. Der erste braucht $\frac{14814 . 6}{30}$ oder 2962,8 Sek. zu dem Weg, der 2te also 2422,8 (nämlich 540 Sek. weniger), der 2te muß daher in jeder Sek. $\frac{14814 . 6}{2422,8} = 36,68$ Fuß zurücklegen.

„ 59) Wenn der Stundenzeiger auf 8 steht, so ist der Minutenzeiger auf 12; der erste habe x Theile (Minuten) zurückzulegen, so hat der 2te 40 + x Min. (Theile) zu durchlaufen; die Wege verhalten sich wie die Geschwindigkeiten = 1 : 12. Sie treffen $43\frac{7}{11}$ Minuten nach 8 Uhr übereinander.

„ 60) Der 2te brauche x Tage, suche die Wege, welche beide zurücklegen und setze sie gleich. Man findet daß der zweite 4 Tage braucht und daß sie 90 Stunden vor N sich treffen.

Auch diese Aufgabe läßt sich ohne Gleichung lösen!

„ 61) Die zweite muß eine Stunde lang wirken, und liefert 240 Ohm, die erste aber 210 Ohm.

Nro. 62) Es seien x Stunden nöthig, der Inhalt des Teiches sei $= n$ Cubikfuß. Die erste läßt in 1 Stunde $\frac{n}{20}$, die 2te $\frac{n}{15}$ Cubikfuß Wasser ein, und in x Stunden beide zusammen $\frac{xn}{20} + \frac{xn}{15} = n$. Beide müssen $8\frac{4}{7}$ Stunden offen sein.

Nro. 63) Antwort: $18\frac{2}{3}$ Tage (wie 62).

„ 64) $\frac{abc}{ab + ac + bc}$ Tage. Nro. 65) $8\frac{2}{5}$ Tage.

„ 66) Es seien x ℔, so kostet ihn die Waare

$$25x - 3600 = 18x + 1440; \quad x = 720 \text{ ℔},$$

welche ihn 240 fl. kosten. Aus 720 ℔ will er also 252 fl. lösen; daher muß er das ℔ zu 21 kr. verkaufen.

„ 67) (Wie 66). Es sind 20 Personen, welche im Ganzen 76 fl., also einzeln 3 fl. 48 kr., zu bezahlen haben.

Auflösung ohne Gleichung. Dadurch, daß im 2ten Falle jede Person 30 kr. mehr gibt als im ersten, kommen 10 fl. mehr zusammen; es müssen daher 20 Personen sein u. s. w.

„ 68) 1 Klafter Holz $= x$ fl. Suche zwei Ausdrücke für den Taglohn, der zweite ist um $\frac{1}{20}$ fl. $>$ der erste u. s. w. $x = 22$ fl. Hieraus folgt, daß er zuerst 42 kr. und dann 45 kr. Lohn erhielt.

„ 69) Die anfängliche Schuld sei $= x$, so ist die zu verzinsende Summe $= \frac{2}{3}x - 56$ fl., hierzu die 3jährigen Zinsen gesucht und beides zusammen $= 112$ fl. gesetzt. $x = 234$ fl.

„ 70) Die Zahl ist $= 361$.

„ 71) (Siehe §. 6 Aufg. 7). Die Seiten sind 20 und 25 u. s. w.

„ 72) Es seien x Bäume, so ist die Seite des Feldes $= \sqrt{16(x + 245)}$ und die des 2ten Stückes $= \sqrt{16x}$, hieraus eine Gleichung! Man findet daß 196 Bäume vorhanden sind, daß das Feld 7056 Quadratfuß groß ist, und daß auf je 36 Quadratfuß 1 Baum gesetzt werden muß.

„ 73) Die Quadratzahl sei x und $a < b$, so ist die gesuchte Quadratzahl $= b^2 + \left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right)^2$, oder $b^2 + \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2$.

„ 74) Von der Zahl 25.

Erste Auflösung. Die Zahl sei $= x$, so ist:

$$\sqrt{(x - 9)} = \sqrt{(x - 16)} + 1 \text{ u. s. w.}$$

2te Aufl. Nenne die Quadratzahl $= x$ (wie in 73).

3te „ Setze in der Formel 73, $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$.

4te „ Die Quadratwurzel aus dem kleineren Rest sei $= x$, so ist die andere $= x + 1$ und ihre Quadrate differiren um 7, (weil bei dem einen 16 und bei dem anderen 9 abgezogen wurde); hieraus $x = 3$, daher der kleinere Rest $= 9$ und die Zahl $= 16 + 9 = 25$.

Nro. 75) Die erste Ziffer sei $= x$, so ist die zweite $= x - 2$, die erste bedeutet aber Zehner und die 2te Einer, daher ist die Zahl $= 10x + x - 2$ und die andere $= 10(x - 2) + x$ u. s. w. Man findet die Zahl 86.

„ 76) Nennt man die erste Ziffer $= x$, so erhält man: $\sqrt{(100x + 10x + x - 3)} = \sqrt{[100(x - 3) + 10x + x]} + 9$. Man erhält hieraus $x = 4$, daher ist die Zahl $= 441$.

„ 77) Die Zahl 100.

„ 78) Zu der Zahl 6. Die Proportion ist $2 : 3 = 4 : 6$.

C. Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

§. 3. Gleichungen mit zwei Unbekannten, Seite 149.

Anmerkung. Die Resultate werden hier so angegeben, daß zuerst x und dann y gesetzt wird.

Nro. 1) 16, und 4, Nro 2) 20, und 1, Nro. 3) beide $= 1$.

„ 4) $103\frac{1}{2}$, 22, „ 5) 10, und $\frac{1}{2}$, „ 6) 4, und 3.

„ 7) 1, und 2, „ 8) 9, und 7, „ 9) 1, und Null.

„ 10) Beide $= 1$, „ 11) Beide sind $= 10$.

„ 12) 3 und 2. „ 13) a und b.

„ 14) $\frac{mf(bd + cg)}{a(df + cg)}$, $\frac{dgm(b - f)}{b(df + cg)}$.

„ 15) 3, und 8. Nro. 16) 1, und 0,3. Nro. 17) $24\frac{3}{4}$, und 6.

„ 18) $\frac{af - bd}{cf - bg}$, $\frac{af - bd}{cd - ag}$. Nro. 19) 5, und 2.

„ 20) (Theilet die 2te Gleichung mit x!). $x = y = 2$.

„ 21) a, und $\frac{a(c - 2b)}{2b}$.

Nro. 22) Bildet die Produkte der äußeren und inneren Glieder u. s. w., so folgt: $x = 1000$, $y = 100$.

„ 23) Die 2te Proportion läßt sich mit $x - y$ abkürzen. Man findet die Zahlen 4 und 2.

„ 24) $\frac{3}{4}$, und $-\frac{2}{3}$. Nro. 25) $x = 10$, $y = \frac{1}{8}$.

„ 26) In der ersten Gleichung ist $a^2 - b^2$ der Hauptnenner, bringe aus beiden die Brüche weg, und kürze die Gleichungen ab, so folgen die 2 Gleichungen:

$$\text{I)}\ -x + y = a + b, \quad \text{II)}\ x(3a + b) - 2ay = -3a(a + b).$$

Man wende nun die 2te Methode an, oder bilde $\text{I} \cdot 2a + \text{II}$, so erhält man: $x = -a$, $y = b$.

„ 27) Aus I folgt $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, oder $\sqrt{x} = 5 - \sqrt{y}$, quadrirt, $x = 25 - 10\sqrt{y} + y$, aus II den Werth für x in diese Gleichung gesetzt, gibt $y = 9$, also $x = 4$.

„ 28) 1te Aufl. $(\text{I}.2) - (\text{II}.5)$ gibt $x = 100$, dann $y = 1$.

2te „ $(\text{I}.3) - (\text{II}.20)$ „ $y = 1$, „ $x = 100$.

3te „ theile I durch 5 und bilde $\frac{\text{I}}{5} . 2 - \text{II}$.

4te „ Setze $\sqrt{x} = u$, und $\sqrt{y} = z$, so folgen die 2 Gleichungen $4u + z = 41$, und $3u + 2z = 32$; aus welchen $u = 10$, $z = 1$, hieraus x und y.

„ 29) Quadrire, so folgt: $\left\{\begin{array}{l}\text{I}\ \ 13x + 6y = 9 \\ \text{II}\ \ 8x - 23y = 15\end{array}\right\}$ woraus:

$$x = \frac{297}{347}, \quad y = -\frac{123}{347}.$$

„ 30) Erhebe I in den Cubus und II in das Quadrat, theile dann I durch $x + y$; so folgt:

$$x - y = 0{,}512; \quad 122x - 125y = 61.$$

Hieraus $x = 1$, $y = 0{,}488$ oder $\frac{61}{125}$.

§. 5. Text-Aufgaben mit 2 Unbekannten, Seite 154.

Zu Aufgabe 1 bis 7 sind die Resultate schon gegeben.

Nro. 8) Nennt man die erste x und die zweite y, so muß x um 6 größer sein als das Doppelte von y u. s. w. Man findet die 2 Zahlen 86 und 40.

„ 9) Die erste ist die größere Zahl, daher $x = y + 3$ u. s. w. $x = 12$, $y = 9$.

Nro. 10) 5 und 7 sind die beiden Zahlen.

„ 11) A 5000 und B 4000 fl.

„ 12) 8 Kreuzer, und 6 Kreuzer das Pfund.

„ 13) Es seien x Maaß Wasser, und y Maaß Salz; so ist I) $x+y=39$; II) $3x+6y=126$; oder $x+2y=42$. Man findet, daß die Lösung aus 36 Maaß Wasser und 3 Maaß Salz besteht.

„ 14) Die erste Bombe wiege leer x ℔ und werde mit y ℔ Pulver gefüllt, so ist I) $x+y=110$, und II) $\frac{x}{2}+y-4=56$.

Man findet hieraus, daß die erste Bombe 100 Pfund wiegt, und mit 10 ℔ Pulver gefüllt wurde; während in die 2te, 50 ℔ schwere Bombe, 6 ℔ Pulver kamen.

„ 15) x Cubikfuß Kupfer und y Cubikfuß Zinn seien darin enthalten; 1 Cubikfuß Kupfer wiegt 8,9 . 54 Pfunde, und 1 Cubikfuß Zinn wiegt 7,3 . 54 ℔. Folglich die 2 Gleichungen:

I) $x+y=9$. II) $x.8{,}9.54+y.7{,}3.54=4239$.

Antwort. 8 Cubikfuß Kupfer und 1 Cubikfuß Zinn; das Kupfer wiegt $3844\frac{4}{5}$ ℔, und das Zinn $394\frac{1}{5}$ Pfund.

„ 16) (Vergleiche § 4 Aufg. 5). Man findet:

$103\frac{106}{123}$ ℔ Zinn und $46\frac{17}{123}$ ℔ Blei.

„ 17) Man nehme jeden Fall besonders, so folgt:

das Gefäß besteht entweder aus $1\frac{1}{10}$ ℔ Gold und $\frac{9}{10}$ ℔ Silber;

oder aus $1\frac{49}{138}$ ℔ Gold und $\frac{89}{138}$ ℔ Kupfer.

„ 18) (Aehnlich wie Nro. 15). Von A: $\frac{n(p-b)}{p(a-b)}$, und

von B: $\frac{n(a-p)}{p(a-b)}$ Zoll.

„ 19) 1 hess. Fuß sei = x Meter, 1 bad. Fuß = y Meter. 4 hessische Fuß sind = 1 Meter und $3\frac{1}{3}$ badische Fuß = 1 Meter, also sind 6 hess. = 5 bad. Fuß.

„ 20) 1 Zehnguldenstück sei = x fl., 1 holländ. Duc. = y fl. Man findet, daß 1 Zehnguldenstück zu 9 fl. 56 kr. und 1 Ducate zu 5 fl. 36 kr. gerechnet wurde.

Nro. 21) Die kleinere sei x, die größere y; so verhält sich: $x+7 : y+7 = 3 : 4$, und $(x-5)2 - 6 = y - 5$, u. s. w. Die 2 Zahlen sind 20 und 29.

„ 22) Der Vater ist jetzt 35, und der Sohn 10 Jahre alt.

„ 23) Es seien x Centner Schwefel, x Centner Kohle und y Centner Salpeter, so ist I) $y = 3+4x$, II) $x+x+y = 12$.

Man findet 9 Centn. Salpeter, $1\frac{1}{2}$ Schwefel und $1\frac{1}{2}$ Centner Kohle.

„ 24) 10 Fünfthalerstücke und 20 Louisd'ors.

„ 25) Es seien x Schwzff., und y Zechinen (ähnlich wie Nro. 20); setze: 1 Schwzff. $= \frac{1225}{1753}$ fl. 1 Zech. $= \frac{86}{15}$ fl.

Man findet, daß er 3506 Schwzff. und 180 Zechinen hat. (Die erste Gleichung wird mit 3 multiplicirt u. s. w., so fällt y weg!)

„ 26) 7 Fuß, und 10 Fuß.

„ 27) Das erste Dampfschiff sei vor x Stunden abgefahren, und das 2te vor y Stunden.

Der Weg, welchen das 2te zurücklegte, ist nach der Angabe um 20 Stunden größer als der Weg des ersten; hieraus bilde man die eine Gleichung. Wäre das 2te Schiff aber 2 Stunden früher abgefahren, so wäre sein Weg $= (y + 2)3$ und diesen $= \frac{9}{10}$ der Summe der 2 Wege gesetzt, welche beide beim Zusammentreffen zurückgelegt haben; so erhält man die andere Gleichung.

Man findet, daß das stromaufwärts fahrende Schiff 15, und das andere 10 Stunden unterwegs war; daß also das erste 5 Stunden früher abfuhr, also um 5 Uhr Morgens. Die Station liegt 10 Meilen von A und 30 Meilen von B, und die Entfernung A B beträgt 40 Meilen.

„ 28) 14000 fl., und 19000 fl. Nro. 29) Die Zahl ist 86.

„ 30) B sei x Tage unterwegs, und habe täglich y Stunden Wegs zurückgelegt; so erhält man:

I) $xy = (x+1)(y-1)$, und II) $(x+6)(y-4) = xy$.

B hat täglich 10, und A 9 Stunden zurückgelegt; B ist 9, und A 10 Tage lang gereist, und die Entfernung der 2 Orte ist = 180 Stunden.

„ 31) Der Umfang besteht aus der doppelten Länge mehr der doppelten Breite; der Inhalt ist = der Produkte der Länge und Breite. Nennt man nun die eine x und die andere y, so erhält man die eine Gleichung durch den Umfang, die andere durch die Inhalte.

Das Feld ist 100 Ruthen lang und 30 Ruthen breit.

Nro. 32) Das Capital, welches er wirklich ausgeliehen hat, sei $= x$, und stehe zu y Procent; suche nun 3 Ausdrücke für die Zinsen, und bilde aus diesen 2 Gleichungen!

Sein Capital ist $= 20000$ fl., es steht zu 4 Procent und trägt also jährlich 800 fl. Zinsen.

„ 33) Er habe im ersten Plane x Reihen, jede mit y Bäumchen angenommen; so besitzt er $xy + 1170$ Setzlinge. Nach dem 2ten Plane hat er aber $(x + 4)(y + 12) - 322$, und nach dem 3ten $(x + 3)(y + 8) + 120$ Setzlinge.

Bildet hieraus 2 Gleichungen.

Im ersten Entwurf hatte er 57 Reihen, und in jeder 190 Bäume.
„ 2ten „ „ „ 61 „ „ „ „ 202 „
„ 3ten „ „ „ 60 „ „ „ „ 198 „

Die Zahl der Bäumchen ist $= 12000$.

Nro. 34) Auflösung. Man nehme x Reihen mehr, und in jeder y Bäume mehr an als im ersten Plane angenommen waren; so kommen $(57 + x)(190 + y)$ Bäume auf das Feld. Da ferner die Zunahmen mit den im ersten Plane angenommenen Zahlen verhältnißmäßig sein sollen, so muß sich verhalten:

$$x : y = 57 : 190 \text{ oder } = 3 : 10.$$

Man hat daher die 2 Gleichungen:

$$\text{I)} \quad 10x = 3y. \qquad \text{II)} \quad (57 + x)(190 + y) = 12000.$$

Aus I, x in II gesetzt und die neue Gleichung reducirt, so folgt:

$$(190 + y)^2 = 40000 = (200)^2,$$

$$\text{oder } 190 + y = 200, \text{ also } y = 10, \quad x = 3.$$

Man muß also 3 Reihen mehr, und in jeder Reihe 10 Bäume mehr annehmen, als im ersten Plane; daher kommen in jede Reihe 200, und es gibt 60 Reihen.

„ 35) Die zwei ersten Ziffern seien x und y, und die dritte $= 18 - x - y$; so erhält man folgende 2 Gleichungen:

$$\text{I)} \quad (x + y)^2 = (18 - x - y)^2 + 36.$$

$$\text{II)} \quad [100x + 10y + (18 - x - y) - 36]2 = 100(18 - x - y) + 10y + x.$$

Werden beide gehörig abgekürzt, so folgt:

$$\text{I)} \quad x + y = 10, \qquad \text{II)} \quad 11x + 4y = 68, \text{ u. s. w.}$$

Die Zahl ist $= 468$.

Nro. 36) Die Seite des ersten sei $= x$, die des 2ten $= y$.

Wenn man die 2 Gleichungen bildet, und aus der ersten den Werth von $x^2 - y^2$ in die 2te setzt, so folgt: $x + y = \frac{p - n}{2a}$, diese in die Gleichung für $x^2 - y^2$ getheilt, so erhält man einen Werth für $x - y$ u. s. w.

Man findet die Seite des ersten Quadrats $= \frac{4a^2 p + (p-n)^2}{4a(p-n)}$,

und die des 2ten $= \frac{(p-n)^2 - 4a^2 p}{4a(p-n)}$.

Nro. 37) Erste Auflösung. Verfahre wie in Aufgabe 36.

2te " " Setze in den Formeln Aufgabe 36 die Werthe $a = 1$, $p = 112$, $n = 56$ u. s. w.

Die Seiten der Quadrate sind 16 Fuß und 12 Fuß.

§. 8. Aufgaben über Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten (vom ersten Grade); Seite 164.

Nro. 1) Gibt die Werthe 1, 2 und 18.

" 2) Aus I und II, x und y, und dann z; $x = 1$, $y = 1$, $z = 6$.

" 3) 10, 1, und 10. Nro. 4) 10, 1, und 2.

" 5) $x = 6$, $y = 12$, $z = 15$. Nro. 6) 5, 8 und 7.

" 7) Aus I y in II, gibt IV; aus IV z in III, gibt x u. s. w.

Man erhält: $x = \frac{bdh}{acf - bdg}$, $y = \frac{adh}{acf - bdg}$,

$z = \frac{ach}{acf - bdg}$.

Machet die Probe, indem z und x in die Gl. III gesetzt wird!

" 8) $x = \frac{dfg + b(h - dn)}{adf + bc}$, $y = \frac{cg - a(h - dn)}{adf + bc}$,

$z = \frac{afh + c(bn - fg)}{adf + bc}$

" 9) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, und 1. Nro. 10) 5, -7, und 2.

" 11) und 12) in beiden ist $x = 100$, $y = 36$, $z = 48$.

" 13) $x = 18$, $y = 34$ und $z = 1$. Nro. 14) 8, 1, und 2.

" 15) 1, 2, 3 und 4. Nro. 16) $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$.

" 17) $\frac{1}{a}$, 1 und b.

Man bringe nämlich zuerst die Nenner weg, eliminire dann zuerst z aus I und II; dann aus II und III, so folgt:

$$\text{IV)}\quad ax(1 + 3b) + y(3b - 1) = 6b.$$
$$\text{V)}\quad ax(10 + 9b) - 2y(3b + 5) = 3b.$$

Aus V den Werth von ax in IV gesetzt, gibt eine Gleichung für y, welche nun reducirt wird; u. s. w.

Nro. 18) Aus I und IV, x und y gesucht, dann x in II, und z in III gesetzt; so findet man: $x = 10$, $y = \frac{20}{3}$, $z = 14$, $u = 24$.

„ 19) Aus III und IV u eliminirt, u. s. w.; so erhält man: $x = y = z = u = 100$.

„ 20) Siehe §. 6, *d*). Man erhält die Werthe: $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $u = -1$, und $v = \frac{1}{2}$.

„ 21) Ordne die Gleichungen; eliminire y aus I und II, so folgt die Gl. V; ferner aus I und III, so wie aus III und IV y eliminirt, gibt VI und VII. Ordne diese 3 Gleichungen.

Eliminire x aus V und VII, gibt Gl. VIII; und nun VI . 2a — VIII gebildet, gibt $z = 0$.

In VI gesetzt, gibt $u = a$; z und u in V gesetzt, gibt $x = \frac{a}{2}$; x und z in III gesetzt, gibt $y = b$.

§. 9. Aufgaben, welche durch Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten gelöst werden können, Seite 165.

Nro. 1) A hat 9000, B 8000, und C 14000 fl.

„ 2) Die Theile sind: $44\frac{4}{5}$, $48\frac{1}{5}$, und $26\frac{2}{5}$.

„ 3) Ein Inf. erhalte in 5 Tagen x fl., ein Cavall. y, und ein Artill. z fl. Löhnung; so erhält man 3 Gleichungen, aus welchen $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{3}{4}$, $z = \frac{5}{6}$ folgt. Die Löhnung beträgt daher für den Inf. 8 kr., für den Cav. 9 kr. und fur den Artilleristen 10 kr. täglich.

„ 4) Der Vater ist 50, die Mutter 40, und der Sohn 10 Jahre alt.

„ 5) Von der Sorte zu 20 kr. hat er 180 Pfd., von der zu 21 kr. 200 Pfd., und von der 3ten 120 Pfd.

„ 6) 1 fl., 40 kr., und 32 kr.

„ 7) 90, 112 und 98 Fuß.

„ 8) 1 Rubel sei x fl., 1 poln. Guld. = y fl., und 1 Thaler H. B. = z fl.; bilde 3 Gleichungen u. s. w.

Man findet, daß 1 Rubel = 1 fl. $53\frac{1}{13}$ kr., 1 poln. Guld. = 17 kr., und 1 Thaler hamb. Banco = 2 fl. $39\frac{18}{23}$ kr. Werth hat.

Nro. 9) 1 franz. = x, 1 heff. = y, 1 altbad. = z neubad. Fuß gesetzt!

Antwort: 1 franz = $1\frac{1}{9}$; 1 heff. = $\frac{3}{4}$, 1 altbad. = 0,97 neubad. Fuß.

" 10) Man erhält die drei Zahlen 12, 9 und 4.

" 11) Die drei Ziffern seien x, y und z, so ist die Zahl = $= 100x + 10y + z$ u. s. w.

Man findet die Zahl 365.

" 12) Die Zahl ist 787.

" 13) Verwandle die Pfunde in Loth; setze die Gewichte: von 1 Zoll Kupfer = x, 1 Zoll Zinn = y, und 1 Zoll Zink = z Loth; so folgen 3 Gleichungen.

Man findet die Gewichte: $12\frac{3}{5}$ Loth für 1 Cub. Zoll Zinn, $15\frac{1}{5}$ Loth für 1 Zoll Kupfer, und $12\frac{1}{6}$ für 1 Cub. Zoll Zink.

" 14) Eine Elle von der ersten Waare koste x fl.
" " " " 2ten " " y " und
" " " " 3ten " " z "

so erhält er im ersten Falle $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} + \frac{4}{z}$ Ellen u. s. w.

Jede Elle der drei Waaren kostet 30, 20 und 15 kr.; und er hat zuletzt 6, 17 und 25 Ellen gekauft.

" 15) Im ersten Stücke sind 99 ℔ Kupfer, 48 ℔ Zink und 3 ℔ Blei; im 2ten seien x ℔ Kupfer, y ℔ Zink und z ℔ Blei.

Die ganze Masse besteht aus 99 + x Kupfer, 48 + y Zink und 3 + z Pfund Blei; daher:

I) $x + y + z = 250$.

II) $99 + x : 48 + y = 16 : 8$, oder $= 2 : 1$, und

III) $99 + x : 3 + z = 16 : 1$.

Hieraus zwei weitere Gleichungen u. s. w.

Man findet, daß die 2te Legirung aus 157 ℔ Kupfer, 80 ℔ Zink, und 13 ℔ Blei bestand.

Auflösung ohne Gleichung.

Die ganze Masse enthält nach dem Zusammenschmelzen 25 Theile = 400 Pfund, also 1 Theil = 16 Pfd.; mithin 256 Pfd. Kupfer, 128 Pfd. Zink und 16 Pfd. Blei.

Zieht man davon den Gehalt der ersten Legirung ab, also 99 Pfd. Kupfer, 48 Pfd. Zink und 3 Pfd. Blei; so bleiben die Bestandtheile des 2ten Stückes, 157, 80 und 13 Pfd. übrig; wie oben.

Nro. 16) Zeichnet ein Viereck, dessen Ecken der Reihe nach durch A, B, C und D bezeichnet werden.

Von A nach B sei der Weg = x Stunden, von B nach C = y, von C nach D = z, und von D nach A = u Stunden.

Bilde 4 Gleichungen, addire sie, theile durch 3; so folgt Glchg. V. Bilde nun V — I, V — II, V — III, und V — IV; so folgt der Weg: $AB = 3\frac{1}{2}$, $BC = 2\frac{1}{2}$, $CD = 2\frac{3}{4}$, und $DA = 4\frac{1}{4}$ Stunden.

„ 17) Die 4 Ziffern seien x, y, z und u, so ist die Zahl = $= 1000x + 100y + 10z + u$, u. s. w.

Man findet 1210.

„ 18) Der Vater ist jetzt 55, die Mutter 40, der ältere Sohn 20, der jüngere 10, und die Tochter 5 Jahre alt.

D. Gleichungen vom zweiten Grade.

§. 2. Aufgaben über reine quadratische Gleichungen (ohne Text), Seite 169.

Nro. 1) $x = \pm 13$, 2) $x = \pm 1{,}183216$, 3) $x = \pm 0{,}2952\ldots$

Anmerkung.

In den folgenden Aufgaben sind die Resultate ohne die Zeichen +, — angegeben, welche für alle gelten.

„ 4) $x = 12$, 5) $x = 1{,}98\sqrt{-1}$, 6) $x = \frac{b^2}{ac^3}\sqrt{2}$.

„ 7) $x = 1\frac{2}{5}a$, 8) $\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, 9) $x = 1{,}5$.

„ 10) Erste Auflösung. Quadrire u. s. w.; so folgt $x = 7$.

2te Aufl. Setze $\frac{49}{x^2} = y$; so folgt: $y = 1$,

daher $x = 7$.

„ 11) Man erhält $x = \sqrt{a(a-2b)}$.

„ 12) Bringe die linke Seite der Gleichung unter gleiche Benennung, so folgt die Gleichung:

$$\frac{4}{4-x} = \frac{4+x}{x^2-1}, \text{ dann: } 5x^2 = 20; \text{ daher } x = 2.$$

§. 3. Aufgaben mit Text über reine quadratische Gleichungen, Seite 169.

Nro. 1) Die Zahl ist 562. 2) Seite = 300,9 Fuß.
„ 3) Man findet die Zahl 440. 4) Die Zahl ist = 4.
„ 5) Antwort 30. 6) Die Zahl ist 12. 7) 9 und 45.
„ 8) 3,354 . . . Secunden. 9) Die Zahl heißt 60.

„ 10) Die Länge sei = x; so ist der Inhalt = $\frac{x^2}{3} = 300$; hieraus: die Länge = 30, und die Breite = 10 Fuß.

„ 11) 5 Personen. Nro. 12) Die Waare wiegt 60 Pfunde.

„ 13) $s = 2\sqrt{\frac{J}{\sqrt{3}}}$, und s = 20 Fuß.

„ 14) Setze J = 1200, a = 60; so folgen die beiden gleichen Seiten = 50 Fuß.

„ 15) 36 : x = x : 49. Man erhält x = 42; das arithmetische Mittel ist $42\frac{1}{2}$, daher die Differenz = $\frac{1}{2}$.

„ 16) Die Differenz ist = $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$.

„ 17) Die Zahl der Jahre sei = x, so ist der Zins =

$$= x \cdot \frac{x}{2} \cdot 6{,}89 \text{ u. s. w.}$$

Man findet 10 Jahre, und 5 % Zinsen.

„ 18) Setzt man die Zahl = x, so ist: $\frac{140}{x-2} - \frac{140}{x+2} = 4$.
Man findet die Zahl 12.

§. 5. Aufgaben über gemischte quadratische Gleichungen, Seite 178.

Nro. 1) Beide Werthe sind = 1. Nro. 2) x = 11, und x = −1.
„ 3) x = 8, und = −13. „ 4) x = 4, und x = 3.

„ 5) 10, und $-8\frac{1}{3}$, Nro. 6) 6,974 . . ., und −0,774 . . .

„ 7) $x = 2 \pm \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}$. Nro. 8) 2, und $-3\frac{1}{7}$.

„ 9) $0{,}04 + \sqrt{-1{,}9984}$, und $0{,}04 - \sqrt{-1{,}9984}$ u. s. w.

„ 10) $x = \frac{6 \pm \sqrt{-81{,}6}}{0{,}7}$; oder $x = 8{,}571 \ldots \pm 12{,}901 \cdot \sqrt{-1}$.

Sowohl in Nro. 7 und 9, als auch in Nro. 10 sind also die Werthe unmöglich.

Nro. 11) 1, oder -3; Nro. 12) $x = 2$, und $x = -10\frac{1}{3}$.

„ 13) Man erhält die Gleichung $x^2 - \frac{7}{3}x = 2$; woraus die beiden Werthe 3, und $-\frac{2}{3}$ folgen.

„ 14) Der Hauptnenner ist $= 3(8x^2 - 7x + 6)$.
Man findet $x = 5$, und $x = -4\frac{2}{7}$.

„ 15) Erste Auflösung. Multiplicire, und ordne die Gleichung; so folgt $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2m}$, und $x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2m}$.

2te Auflösung. Setze $mx = y$, so folgt: $y^2 + y = 1$; hieraus $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; daher $x = \frac{y}{m}$ u. s. w.

„ 16) Man findet: $x = \frac{-b^2 \pm \sqrt{b^2(a^2 + 2ab + b^2)}}{a}$, also:

$x = b$, oder $x = -\frac{2b^2 + ab}{a} = -\frac{b}{a}(2b + a)$.

„ 17) $x = -\frac{a - b}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2 - 6ab + b^2}{4}}$; hieraus die beiden Werthe $x = \frac{-a + b \pm (3a - b)}{2}$, also: a, oder $b - 2a$.

„ 18) Man erhält die Gleichung $x^2 - \frac{(a-b)^2}{a+b}x = 4ab$, woraus nach gehöriger Reduction und Wurzelausziehung

$x = \frac{(a-b)^2 \pm (a^2 + 6ab + b^2)}{2(a+b)}$ folgt:

Hieraus erhält man dann die beiden Werthe:

$$x = -\frac{4ab}{a+b}, \text{ und } x = a + b.$$

„ 19) Man erhält die Gleichung: $x^2 - \frac{17}{7}x = -34$.

Hieraus $x = \frac{17 \pm 5\sqrt{-255}}{14}$.

„ 20) Gibt $x^2 + 4x = \frac{9}{4}$, daher $x = \frac{1}{2}$, und $= -4\frac{1}{2}$.

Nro. 21) Erste Auflösung. Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 + ax = b$, u. s. w.; so folgt $x = \frac{2d^2}{c^2}$, (beide Werthe).

2te Auflösung. Setze $c^4x^2 - 4c^2d^2x + 4d^4 = 0$, und ziehe die Quadratwurzel aus; so folgt $c^2x - 2d^2 = 0$, hieraus $x = \frac{2d^2}{c^2}$.

„ 22) Erste Auflösung. Setze $(\sqrt{x})^2 = (x - 20)^2$, u. s. w.

2te Aufl. $\sqrt{x} = y$, so ist $y^2 - y = 20$, u. s. w.

3te „ Setze $20 = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})$, ergänze mit $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, und ziehe die Wurzel aus; so folgt: $\pm\frac{9}{2} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ u. s. w. In allen 3 Fällen wird $x = 25$, und $x = 16$.

(Bei der Substitution des Werthes 16 muß $\sqrt{16} = -4$ genommen werden, weil $\sqrt{x} = -4$ war; wenn man die Werthe prüfen will.)

„ 23) Man erhält $x = 5$, und $= 2$.

„ 24) Erste Auflösung. Setze $(\sqrt{x} - m^2)^2 = m^2(x - m^4)$, u. s. w., so folgt die Gleichung:

$$x^2 - \frac{2m^4(m^4+1)}{(m^2-1)^2} = -m^8\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2.$$

Hieraus $x = \frac{m^4(m^4+1)}{(m^2-1)^2} \pm \sqrt{\frac{m^8\left[(m^4+1)^2 - (m^2+1)^2(m^2-1)^2\right]}{(m^2-1)^4}}$,

oder $x = \frac{m^4(m^4+1) \pm \sqrt{m^8 . 4m^4}}{(m^2-1)^2} = \frac{m^4(m^2 \pm 1)^2}{(m^2-1)^2}$.

Daher erhält man die beiden Werthe: $m^4\left(\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2$, und m^4.

2te Auflösung. Setze $\sqrt{x} = y$, also $x = y^2$ in die Gleichung, so folgt: $y - m^2 = m\sqrt{(y^2 - m^4)}$; oder:

$$(y - m^2)^2 = m^2(y^2 - m^4).$$

Mit $y - m^2$ getheilt, gibt: $y - m^2 = m^2(y + m^2)$; woraus y gesucht wird, und x ist dann $= y^2$ u. s. w.

Da ferner $y - m^2$ ein Faktor war, so ist auch $y = m^2$; hieraus $x = m^4$.

Nro. 25) Theile zuerst durch $\sqrt{7}$, und setze dann:

$$\left(5\sqrt{\frac{3x}{7}}\right)^2 = \left(\frac{22}{3} - x\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Man erhält $x = 2\frac{1}{3}$, oder $x = 23\frac{1}{21}$.

Anmerkung. Bei der Prüfung des Werthes

$23\frac{1}{21}$ muß $\sqrt{\frac{3x}{7}}$, oder $\sqrt{\frac{484}{49}} = -\frac{22}{7}$

angenommen werden.

Nro. 26) $x = 4$, und $= -21\frac{1}{3}$.

„ 27) Theile durch $x - 2$, so folgt: $x = -3$, und $x = 1$.

„ 28) Ergänze durch a^4, so folgt: $x = \pm a$, und $x = \pm a\sqrt{-3}$.

„ 29) Man findet: $x = 2$, oder $x = \sqrt[8]{2} = 1{,}25992$.

„ 30) Setze $\sqrt[6]{x} = y$, $\sqrt[3]{x} = y^2$ u. s. w., so ist:
$x = y^6 = 64$, oder $= 1$.

„ 31) Erste Auflösung. Setze:

$\left(\sqrt[4]{x^{-3}}\right)^2 = \left(-\frac{3}{x}\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{12}\right)^2$, so folgt:

$\sqrt{x^{-3}} = \frac{9}{x^3} + \frac{1}{2}\sqrt{x^{-3}} + \frac{1}{144}$; hieraus ferner die Gleichung: $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{18}\sqrt{\frac{1}{x^3}} + \frac{1}{1296} = 0$, $\sqrt{\frac{1}{x^3}} = y$ gesetzt, gibt dann: $y^2 - \frac{1}{18}y + \frac{1}{1296} = 0$; hieraus die Quadratwurzel, gibt: $y - \frac{1}{36} = 0$, $y = \frac{1}{36}$, daher: $x = \sqrt[3]{1296} = 10{,}90272 \ldots\ldots$

2te Auflösung. Setze: $\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}} + 3\sqrt{\frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{12}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}} = y$ angenommen u. s. w.; so folgt $y = -\frac{1}{6}$, daher $x = \sqrt[3]{1296}$.

Nro. 32) Die Summe ist $= 36$, das Produkt $= -90$. (Siehe §. 4, 4te Auflösung.)

„ 33) Da die Summe der Wurzeln $= 35$ ist, so ist der zweite Werth von $x = 35 -$ dem ersten $= 35 - (-1) = 36$; oder da das Produkt $= -36$ ist, so ist der zweite Werth $= \frac{-36}{-1} = 36$.

„ 34) Man findet $x = 10$ und $x = 2$, daher ist $x - 10 = 0$ und $x - 2 = 0$.

Nro. 35) Da $x = 2a$, und $x = -a$, so erhält man
$(x - 2a)(x + a) = 0$.

„ 36) Erste Auflösung. Die Summe ist $= +9$, das Produkt $= -52$, daher die Gleichung $x^2 - 9x = 52$.

2te Auflösung. Wenn $x = 13$, und $x = -4$, so ist: $(x - 13)(x + 4) = 0$, die Gleichung; oder $x^2 - 9x = 52$.

„ 37) Man findet $x^2 - 6x = -12$.

„ 38) Man erhält $(x + 20)(x - 1)$.

„ 39) Betrachte den Zähler, so wie auch den Nenner als Gleichungen, so folgt: $a = 5b^2$, und $a = 2b^2$; daher die Faktoren $(a - 5b^2)(a - 2b^2) =$ Zähler; ferner $4b^4 - a^2 = 0$, gibt: $a = 2b^2$, und $a = -2b^2$, also die Faktoren: $(a - 2b^2)(a + 2b^2)$.

Hieraus den Bruch $\frac{a - 5b^2}{a + 2b^2}$.

„ 40) Setze zuerst $\frac{x(x^2 + 11x + 28)}{a(x+4) + 7(x+4)}$; dann $x^2 + 11x + 28 = 0$, aufgelöst, gibt das Produkt $(x + 4)(x + 7)$; daher ist der Bruch $= \frac{x(x + 7)}{a + 7}$.

Anmerkung.

Der Nenner läßt sich ebenfalls durch eine Gleichung zerlegen, nämlich: $ax + 4a + 7x + 28 = 0$, $x(a + 7) = -4(a + 7)$; daher $x = -4$, und $x + 4$ ist der eine, $a + 7$ der andere Faktor, u. s. w.

§. 6. Resultate zu den quadratischen Gleichungen mit Text, Seite 180.

Nro. 1) Man erhält 4, oder -14. 2) 9, oder -8.

„ 3) $\frac{1}{4}$, oder $-\frac{3}{20}$. 4) 40 Fuß, und 70 Fuß.

„ 5) $(x + a)^2 = 2x^2$, hieraus $x = a(1 + \sqrt{2}) = 2{,}414\,a$.

„ 6) Man findet 45 Fuß. 7) 12, oder $5\frac{1}{3}$.

„ 8) Die Länge sei $= x$, so ist $x(x - 9) = 400$. Man findet die Länge $= 25$, die Breite $= 16$ Fuß.

„ 9) Die Seite des ersten sei $= x$, die des 2ten $= x - 30$ u. s. w. Man erhält die Seiten $= 50$, und $= 20$ Fuß.

„ 10) Länge $= x$, Breite $= 130 - x$, daher: $x(130 - x) = 3000$. Man findet 30, oder 100.

Hier sind beide Werthe zulässig, denn in einem Falle ist die Länge $= 30$, und die Breite $= 100$; im anderen Falle aber die Länge $= 100$, und die Breite $= 30$; der Inhalt ist in beiden: $= 100 \,.\, 30 = 3000$.

Nro. 11) Es seien x ℔; so kostet jedes x + 5 Kreuzer u. s. w. Man erhält 20 Pfunde, jedes zu 25 Kreuzer.

„ 12) Es sei x Jahre zu x — 1 Procent ausgeliehen; so ist der Zins = $\frac{800\,x\,(x-1)}{100}$ u. s. w.

Man findet, daß das Capital 5 Jahre lang und zu 4 % ausgeliehen war.

„ 13) Es sind 12 Personen, von welchen jede 2 fl. bezahlt.

„ 14) Man erhält: $\left(\frac{x+30}{15} + \frac{6}{5}\right)^2 = x - 2.$
x = 102, und = 27; beide Werthe entsprechen den Angaben.

„ 15) Entweder 15, oder 7.

„ 16) Der erste Divisor sei = x, so ist der zweite = x + 2 u. s. w. Man erhält die Zahl 10, (oder — 12).

„ 17) Erste Aufl. Er habe x Ellen gekauft, so kostet im ersten Falle jede Elle $\frac{24}{x}$, im 2ten $\frac{24}{x-2}$ fl., hieraus eine Gleichung:

2te Aufl. Er habe Tuch gekauft, von welchem die Elle x fl. kostet; so erhält er im ersten Falle $\frac{24}{x}$ Ellen, und im 2ten Falle $\frac{24}{x+1}$ Ellen; hieraus wieder eine Gleichung!
Man findet, daß er 8 Ellen, jede zu 3 fl. kaufte.

„ 18) 15 Personen.

„ 19) $\frac{90}{x} = \frac{90}{x + \frac{1}{10}} + 10$; $x = \frac{9}{10}$ fl. = 54 Kzr.

„ 20) (5 Kzr. = $\frac{1}{12}$ fl. gesetzt!) Man findet, das es früher 120 Arme waren, von welchen jeder 50 kr. erhielt; und jetzt sind es 160, und von diesen erhält jeder 45 kr.

„ 21) $\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x-1} - \frac{3}{4}$; die Zahl ist = 3, oder = $-\frac{1}{3}$.

„ 22) Da Länge mal Breite = Inhalt, so ist die Breite = dem Inhalt getheilt durch die Länge; es sei diese = x, suche für jedes die Breite, und bilde die Gleichung.

Das erste ist 25 Fuß lang und 4 Fuß breit, und das 2te ist 20 Fuß lang und 5 Fuß breit.

Andere Auflösung. Die Länge des ersten sei = x, so ist die des 2ten = x — 5, die Breite des ersten = $\frac{100}{x}$,

die des 2ten $= \frac{100}{x} + 1$. Bilde nun aus der Länge und Breite des 2ten den Inhalt, u. s. w.

Nro. 23) Erste Aufl. Der Bronnen sei x Fuß tief, so braucht der Stein eine Zeit von $\sqrt{\frac{x}{16,35}}$ Secunden (siehe Aufgabe 8. §. 3.); der Schall braucht aber $\frac{x}{1107}$ Secunden, um aus der Tiefe oben anzukommen. Beides zusammen gibt 5 Secunden; hieraus die Gleichung.

2te Aufl. Der Stein sei x Sec. lang gefallen, so hat er einen Weg $= 16,35\,x^2$ zurückgelegt. Der Schall aber brauchte dann $5 - x$ Secunden und legte $(5 - x) . 1107$ Fuß zurück; beide Wege sind aber gleich. Hieraus eine Gleichung.

Man findet bei der 2ten Aufl. $x = 4,6769$, also brauchte der Schall 0,3231 Secunden, in welchen er einen Weg von 357,67 Fuß zurücklegte; daher ist die Tiefe = 357,67 Fuß.

(Hierbei ist jedoch auf den Widerstand der Luft keine Rücksicht genommen, welcher die Fallhöhe vermindert.)

Nro. 24) Man erhält $x = 16,9467 \ldots$; und daher die Proportion: $1,9467 : 4,9467 = 5,19064 : 13,19064 \ldots$.

„ 25) Man erhält die Zahlen 10 und 12, oder -10 und -12. Die Gleichung ist: $(x + 2)^3 - x^3 = 728$.

„ 26) Die eine Seite sei $= x$, so ist die andere $= 9 - x$, suche die Inhalte u. s. w. Man findet 2 Zoll und 7 Zoll für die Seiten; also 8 Zoll und 343 Zoll für die Würfel.

„ 27) Antwort 361, (auch 324, wenn man $\sqrt{324}$ als negativ annimmt).

„ 28) Um 40 Fuß.

„ 29) Der eine sei $= x$, so ist der andere $= x - 2$, $h = 27$, $J = 3080,34$ gesetzt u. s. w., so findet man eine Gleichg. für x. Die 2 Halbm. sind 7 und 5 Zoll.

„ 30) 2,8062 ...; oder 2,53401, (wenn man die Wurzel aus der Zahl als negative Größe annimmt).

„ 31) Man findet $x = -18 \pm \sqrt{-76}$, die Aufgabe ist daher unmöglich; es gibt keine solche Zahl.

„ 32) Der erste habe vor dem Zusammentreffen x, und der 2te $x - 1$ Meilen zurückgelegt.

Da nun der erste zu den $x - 1$ Meilen bis P noch 15 Stunden braucht, so legt er eine Meile in $\frac{15}{x - 1}$ Stunden zurück und er brauchte daher zu dem Wege x eine Zeit von $\frac{15x}{x - 1}$ Stunden.

Der 2te braucht zu den x Meilen bis nach N noch $12\frac{4}{5}$ Stunden, er legte also seinen Weg von $x-1$ Meilen in $\frac{12\frac{4}{5}\left(x-1\right)}{x}$ Stunden zurück. Beide Zeiten differiren um 4 Stunden.

Man findet, daß der Ort des Zusammentreffens 16 Meilen von N liegt; die ganze Entfernung ist 31 Meilen. Der erste legt in jeder Stunde eine, und der 2te $1\frac{1}{4}$ Meilen zurück.

Nro. 33) Der erste brauche x Tage dazu, so hat er in 10 Tagen $\frac{10}{x}$, und der andere in 8 Tagen $\frac{8}{x-4}$ fertig gebracht, wenn man die Arbeit $=1$ annimmt. Beide zusammen haben die ganze Arbeit fertig gebracht.

Der erste braucht 20 Tage, der 2te aber 16 Tage.

„ 34) Die Gewinne verhalten sich wie die Produkte aus der Einlage in die Zahl der Monate.

A gab 600 fl., und gewinnt 300; B hat 400 fl. gegeben, und 240 fl. gewonnen.

„ 35) Die Zahl sei $= x$, so ist $\sqrt[3]{(x+1543752)} = \sqrt[3]{x} + 18$. Diese Wurzeln fallen nicht weg, wenn man auf die gewöhnliche Weise verfährt; man setze daher $\sqrt[3]{x} = y$, so ist $x = y^3$, daher $\sqrt[3]{(y^3+1543752)} = y + 18$. Hieraus durch Potenzerhebung: $y = 160$, also $x = 4096000$.

„ 36) $\sqrt[3]{(x+11347)} = \sqrt[3]{(x-10981)} + 2$.

Erste Auflösung. Setze $\sqrt[3]{(x-10981)} = y$ u. s. w.

2te Aufl. Die eine Cubikwurzel, z. B. die 2te, sei $= y$, so ist die erste $= y + 2$, und die dritten Potenzen sind um $11347 + 10981$ unterschieden u. s. w. Man findet 226981; (nämlich $y = 60$, also $x = 60^3 + 10981$).

„ 37) Das Cap. zu x %, so ist der Zinsrest am Ende des ersten Jahres $= 500x - 1200$, und dessen Zinsen sind am Ende des 2ten Jahres $= (5x-12)(x+1)$.

Diese müssen mit dem Zinsreste und den Zinsen, welche das Capital selbst im 2ten Jahre getragen hat, zusammen die Vermögenszunahme geben.

Man findet, daß das Capital zu 4, und der Zinsrest zu 5 Procent ausgeliehen war.

§. 8. Aufgaben über quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Seite 187.

Nro. 1) 11 und 10, beide positiv und negativ. 2) 4, und 3.

„ 3) 9 oder — 1, und 1 oder — 9.

„ 4) Theile I durch II, 10 und 1.

„ 5) Durch Substitution! $x = -\frac{1}{a}$, oder $\frac{3}{a}$; $y = -\frac{3}{b}$, oder $\frac{1}{b}$. Nro. 6) 10 und 4.

„ 7) $x = 20, -6$, und $y = 6, -20$. Nro. 8) 10 und 1.

„ 9) Addire und subtrahire, so folgt: $x = 10$, oder -11; und $y = 2$, oder -1.

„ 10) $x = \pm\sqrt{[b \pm \sqrt{(a^2 + b^2)}]}$ und

$$y = \pm\sqrt{[-b \pm \sqrt{(a^2 + b^2)}]}.$$

„ 11) $x = \pm 7$, $y = \pm 5$.

„ 12) Bilde I + II, so folgt $x + y$, und durch I — II findet man $x^2 - y^2$, also auch $x - y$ u. s. w. Man erhält:

$$x = \frac{a\sqrt{(a + b)}}{a + b}; \quad y = \frac{b\sqrt{(a + b)}}{a + b}.$$

„ 13) Ziehe aus I die $\sqrt{\ }$, und substituire; so folgt: $x = 10$, oder $-9\frac{1}{5}$; und $y = 8$, oder $-7\frac{9}{25}$.

„ 14) $x = \frac{b}{2a}\left[b \pm \sqrt{(b^2 - a^2)}\right]$, und

$$y = \frac{b}{2a}\left[b \mp \sqrt{(b^2 - a^2)}\right].$$

„ 15) 25 und 9.

„ 16) Setze $\sqrt{x} = u$ und $\sqrt{y} = z$ und verfahre wie in Aufgabe 5, Seite 185, so folgt: 9 und 4.

„ 17) Ordne I, so folgt: $2(x^3 - y^3) = 7xy(x - y)$, theile durch $x - y$, und setze den Werth von xy aus II in die Gleichung; so folgt: $x^2 + y^2 = 5$, diese mit II verbunden u. s. w., gibt: $x = \pm 2$, $y = \pm 1$.

„ 18) 1) Durch Substitution. 2) Multiplicire die 3 Gleichungen; so folgt: $x^2y^2z^2 = 64$, $xyz = \pm 8$. Diese durch I, II und III getheilt, gibt: ± 4, ± 2, ± 1.

„ 19) Alle 3 addirt, dann I, II und III subtrahirt (nachdem vorher mit 2 gehoben wurde); so folgen 3 Gleichungen wie in Nro. 18.

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 2, \quad z = \pm 3.$$

Nro. 20) Aus II z^2 in I, gibt $x + y = \pm 21$; III geordnet, gibt $xy(x + y) = 2310$, also $xy = \pm 110$ u. s. w.

$$x = \pm 11, \quad y = \pm 10, \quad z = \pm 12.$$

„ 21) Bringe xyz auf die andere Seite, addire die 3 Gleichungen und subtrahire dann von der Summe die erste Gleichung, so erhält man einen Werth für z. Diesen substituirt u. s. w., gibt: $y = \pm 4$, $x = \pm 2$, $z = 6$.

„ 22) Aus I, xz in II gesetzt, gibt: $y = a$; in I und III gesetzt, gibt: $x = \frac{b-a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - 2ab - 3a^2)}$ und:

$$z = \frac{b-a}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - 2ab - 3a^2)}.$$

„ 23) Multipl. alle 4 Gl., ziehe die Cubikwurzel aus, und theile dann mit jeder Gleichung; so folgt:

$$u = 4, \quad z = 3, \quad y = 5, \quad x = 10.$$

„ 24) $I^2 - III.2$ von II subtrahirt, gibt $u = \pm 1$. $u = 1$ in IV gesetzt, gibt $xy = 24$; in III gesetzt, gibt $(x + y)z = 30$. $x + y$ aus I in die letzte Gleichung substituirt, gibt $z = 10$, oder $= 3$, folglich $x + y = 3$, oder $= 10$. Mit xy verbunden; so erhält man: $x = 4$, $y = 6$, u. s. w.

§. 9. Aufgaben zur Anwendung der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Seite 188.

Zu Nro. 1 bis 6 sind die Resultate schon gegeben.

Nro. 7) Die Quadratwurzeln seien $= x$, und $= y$, so sind die Zahlen $= x^2$, und $= y^2$. Man findet die Zahlen 21,2111, und 6,7889 ....

„ 8) Die Zahlen sind ± 99, und ± 225.

„ 9) Der Bruch sei $= \frac{x}{y}$. Ordne I und II und eliminire x, so folgt die Gleichung $y^2 - 12y = 0$, welche sich auf eine Gleichung vom ersten Grad reduciren läßt.

Man findet den Bruch $\frac{7}{12}$.

„ 10) 18 und 12. Nro. 11) 60 und 45.

„ 12) $x^2 + y^2 = \frac{1352}{2}$, 3te Seite $= \sqrt{676}$, $x : y = 12 : 5$ u. s. w. Man findet die Seiten 10, 24 und 26.

Nro. 13) Er kaufe zuerst x ℔, jedes zu y Kreuzer.

Man findet, daß er 42 ℔ zu 25 kr., und 90 ℔ zu 24 kr. kaufte.

„ 14) Es hat 100 Ruthen Länge, und 30 Ruthen Breite.

„ 15) Setze $x:y = y:z$ u. s. w. Man erhält $9:15 = 15:25$.

2te Auflösung. Das erste Glied sei $= x$, der Quotient $= y$, so ist die Proportion: $x : xy = xy : xy^2$ u. s. w.

„ 16) Die Proportion sei $x : y = z : u$.

Aus I folgt $(x + u)^2 = (y + z)^2 - 112(y + z) + 56^2$.

II und III doppelt genommen und zu IV addirt, so entsteht:

$$(x + u)^2 + (y + z)^2 = 1586.$$

Suche nun $x + u$ und $y + z$ als unbekannte Größen, und verbinde diese mit den Gleichungen $xu = yz = 84$ u. s. w.

Die Proportion ist: $3 : 4 = 21 : 28$.

„ 17) Das erste Capital sei $= x$, und stehe zu y Procent; so sind die Zinsen $\frac{xy}{100}$ und $\frac{x\left(y + \frac{1}{2}\right)}{200}$.

Im 2ten Falle sind die Zinsen aber $= \frac{3xy}{200}$ u. s. w.

Man findet, daß er 16000 fl. zu 4 % und 8000 fl. zu $4\frac{1}{2}$ % aufgenommen hat.

„ 18) x Capital zu y % z Jahre lang.

Bilde aus den Werthen für die Zinsen drei Gleichungen; setze aus I, $\frac{x}{100}$ in II und III; suche dann zwei Gleichungen zu bilden, von welchen die eine den Werth von yz und die andere den Werth von $y + z$ gibt u. s. w.

Man findet, daß 1000 fl. Cap. entweder zu 5 % 4 Jahre lang, oder zu 4 % 5 Jahre lang ausgeliehen waren.

„ 19) Wenn x die Hypotenuse und y und z die Katheten bedeuten, so findet man:

1) $x = \frac{a^2 - 4b}{2a}$, und

2) $y = \frac{a^2 + 4b}{4a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{a^2}{4} - 6b + \frac{4b^2}{a^2}\right]}$.

3) $z = \frac{a^2 + 4b}{4a} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{a^2}{4} - 6b + \frac{4b^2}{a^2}\right]}$.

Nro. 20) Ordne; bilde I . 3 — II; eliminire aus I und IV x, verbinde diese Gleichung mit III u. s. w.

Man findet die Zahl 1846.

E. Unbestimmte oder diophantische Aufgaben.

Seite 190.

§. 3. Aufgaben über eine Gleichung mit zwei Unbekannten, Seite 195.

Nro. 1) $x = 19, 14, 9$ oder 4; und $y = 2, 4, 6$ oder 8.

„ 2) Man findet: $y = 3n - 2$ und $x = 46n - 27$, oder wenn man statt n die Größe $p + 1$ setzt: $y = 3p + 1$, und $x = 46p + 19$, daher erhält man: $y = 1$, und $x = 19$, 4 und 65, 7 und 111 u. s. w.

„ 3) Man findet, wenn y in x ausgedrückt wird, die zwei Formen $x = -3n + 1$ und $y = 8n + 50$, woraus die zweizifferigen Werthe folgen (wenn $n = 0$, $n = -1$, $n = -2$ u. s. w. gesetzt wird):

$x = 10$, $y = 26$; oder $x = 13$ und $y = 18$; oder $x = 16$, $y = 10$.

„ 4) Man findet: $y = 24 - \frac{3x}{2}$. Daher $x = 2$, $y = 21$, und $x = 4$, $y = 18$; ferner $x = 6$, $y = 15$, und $x = 8$, $y = 12$.

Die anderen Werthe, z. B. $x = 10$, $y = 9$, passen nicht.

„ 5) Die Gleichung ist: $20x + 17y = 1700$; man findet hieraus: Daß er entweder 68 ℔ von der ersten und 20 ℔ von der 2ten; oder 51 und 40, oder 34 und 60, oder 17 und 80 ℔ verkaufte.

„ 6) $32x + 24y = 840$, oder $4x + 3y = 105$.

$y = 35 - \frac{4x}{3}$ u. s. w. Man findet, daß er entweder

18 Maaß von der ersten und 11 Maaß von der 2ten, oder
21 „ „ „ „ „ 7 „ „ „ „ „
24 „ „ „ „ „ 3 „ „ „ „ nahm.

(Die Werthe 3 und 31, 6 und 27, 9 und 23, 12 und 19, 15 und 15 sind unbrauchbar, weil sie zusammen 30, oder mehr als 30 Maaß geben.)

Nro. 7) Es seien x Kronenthl., so sind es 78 — x Prss. Thl., der Werth beider zusammen sei = y, so folgt:

$$19x - 20y = -2730.$$

Man findet, daß 10 Kronenthaler und 68 Prss. Thl. darin sind, welche zusammen 146 fl. ausmachen.

„ 8) Die Quotienten setze = x und y, so sind die Zahlformen $31x + 5 = 58y + 7$. Man findet die Zahlform: $1798n + 935$, also die Zahlen 935, 2733 u. s. w.

Anmerkung.

Die Zahlen bilden eine Reihe, deren Differenz = 1798 ist.

„ 9) Wenn die Quotienten wieder x und y genannt werden, so folgt $79x = 55y + 10$, hieraus y u. s. w.

Man findet die Zahl 395.

„ 10) Die Zahlform war $4345n + 395$; daher erhält man die Zahlen: 4740 und 9085.

„ 11) Es seien im ersten Falle x, und im 2ten y Reihen. Man findet 294 Bäume.

„ 12) Man erhält $30x = 37y + 12$, die Zahlform ist $1110p - 210$, oder wenn z. B. $p = q + 1$ gesetzt wird = $= 1110q + 900$, daher die Zahlen = 900, 2010, 3120, 4230 u. s. w.

„ 13) Die Quotienten seien = x und y, so ist:

$$23x + 42y = 1846.$$

Man findet 1426 und 420, oder 460 und 1386.

„ 14) Der Quotient für die goldene Zahl sei = x, der für den Sonnenzirkel = y, so sind die Jahreszahlen

$$= 19x + 15 - 1 = 19x + 14 \text{ und } = 28y + 9;$$

hieraus die Gleichung.

Man findet die Jahreszahl 1857.

„ 15) Antwort. Die Zahlung kann durch 4 Fünffrankenstücke und 80 kl. Thlr., oder durch 8 Fünfff. und 73 kl. Thlr., durch 12 Fünfff. und 66 kleine Thlr., oder durch 16 Fünffrk. und 59 kl. Thlr. geleistet werden u. s. w.

§. 5. Aufgaben über unbestimmte Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten, Seite 201.

Nro. 1) Die Zahlen von der Form $120n + 57$, also:

57, 177, 297, 417 u. s. w.

„ 2) Die Zahlen 269, 479; 689 und 899.

Nro. 3) Man erhält hier nur eine Gleichung mit 3 Unbekannten, nämlich $70x + 80y + 90z = 2100$, oder:

$$7x + 8y + 9z = 210.$$

Nimmt man nun z. B. $z = 1$, so folgt: $7x + 8y = 201$. Hieraus die Formen:

$$x = 8n + 7 \quad \text{und} \quad y = 19 - 7n.$$

Für $n = 0$, folgt bei $z = 1$, $x = 7$, $y = 19$.
" $n = 1$ " , $z = 1$, $x = 15$, $y = 12$.
" $n = 2$ " " $z = 1$, $x = 23$, $y = 5$.
" $n - 3$ " " $z = 1$, $x = 31$, $y = -2$ u. s. w.

Nimmt man aber $z = 2$ an, so folgen die Werthe: 8 und 17, 16 und 10, 24 und 3, (wenn nämlich $n = -2$, $n = -1$, und $n = 0$ gesetzt wird.

Hiervon sind, wegen der Nebenbedingung, daß y größer als 2x sein soll, nur folgende Werthe gültig:

$z = 1$, $x = 7$, $y = 19$, und $z = 2$, $y = 17$, $x = 8$.

Er kaufte also entweder 7 ℔ von der ersten, 19 ℔ von der 2ten und 1 ℔ von der 3ten Waare; oder 8 ℔ von der ersten, 17 von der 2ten und 2 von der 3ten Waare u. s. w.

Für $z = 3$ erhält man noch weitere Werthe.

" 4) $x + y + z = 30$, und $38x + 19y + 7z = 745$. Man findet 13 Männer, 11 Frauen und 6 Kinder.

" 5) Man erhält: 8, 18 und 12; oder 20, 23 und 19; oder 32, 28 und 26 u. s. w. (unendlich viele Werthe).

" 6) Die Gleichungen sind: I) $x + y + z = 50$,
II) $12x + 7y + 6z = 440$.

Er verkaufte entweder	19	Gänse,	26	Hühner und	5	Enten.
oder:	20	"	20	" "	10	"
"	21	"	14	" "	15	"
"	22	"	8	" "	20	"
"	23	"	2	" "	25	"

" 7) Man findet:

den 1ten = 26, den 2ten = 4, und den 3ten = 40
oder: " " = 27, " " = 8, " " " = 35
" " " = 28, " " = 12, " " " = 30 u. s. w.

Die anderen Werthe lassen sich aus den Reihen bilden, deren Differenzen = 1, = 4, und = −5 sind.

Nro. 8) Man erhält nach gehöriger Reduction die 2 Gleichungen:
I) $x - 2y - 3z = -3$, II) $x - z = 7$.
Aus II ist $x = 7 + z$, und aus I, $y = 5 - z$.
$z = 0$, gibt die Zahl 750; $z = 1$, gibt die Zahl 841.
$z = 2$, " " " 932; $z = 3$, " " " 1023, ist unbrauchbar.
Die gesuchte Zahl ist daher entweder 750, oder 932.

Nro. 9) Die Gleichungen sind (wenn man die Quotienten x, y und z nennt):
I) $11x = 13y + 11$, II) $13y = 30z + 2$.
Man findet: $y = 30n + 14$ (aus Gl. II); und $x = 390q + 53$, daher die Zahl $= 4290q + 583$.
Daher erhält man nur eine dreizifferige Zahl, nämlich 583.

" 10) $20x = 9y + 9z + 9$, und $\frac{y - z}{2x} = \frac{1}{6}$.
Man findet die Formen (wenn man solche positiv macht):
$x = 18n + 9$, $y = 23n + 11$, und $z = 17n + 8$,
daher $x = 9$, $y = 11$, $z = 8$,
oder $x = 27$, $y = 34$, $z = 25$ u. s. w.

" 11) Die Theilung durch 5 kann außer Acht gelassen werden, da eine Zahl, welche durch 10 theilbar ist, auch jedenfalls durch 5 getheilt werden kann.
Man findet die Form $180n + 30$, daher die Zahlen:
210, 390, 570, 750, und 930.

" 12) Es seien x Kronenthaler, y Guldenstücke, z Sechser, und $39 - x - y - z$ Kreuzer im Beutel gewesen.

So ist: $\frac{27}{10}x + y + \frac{z}{10} + \frac{39 - x - y - z}{60} = 14$.

und $\frac{27}{20}x + \frac{2y}{3} + \frac{z}{10} + \frac{3}{2} \cdot \frac{39 - x - y - z}{60} + \frac{8}{10} = 10\frac{9}{60}$.

Diese 2 Gleichungen geben geordnet $\begin{cases} \text{I)}\ 161x + 59y + 5z = 801. \\ \text{II)}\ 159x + 77y + 9z = 1005. \end{cases}$

Zieht man nun I von II ab, so folgt: $x = 9y + 2z - 102$, diesen Werth in II gesetzt, gibt $z = 52 - 4y + \frac{219 - 200y}{327}$ u. s. w.

Man findet: $y = -327r + 6$, $z = 1508r + 25$, $x = 73r + 2$, und die Zahl der Kreuzer $= 6 - 1254r$.

Wird $r = 0$ gesetzt, so folgt: $x = 2$, $y = 6$, $z = 25$ und die 4te Zahl $= 6$; die anderen Werthe sind unbrauchbar, weil sie negativ sind.

Es waren also 2 Kronenthaler, 6 Guldenstücke, 25 Sechser und 6 Kreuzer in dem Beutel.

Nro. 13) Suche z aus III in einer ganzen Zahl auszudrücken, so folgt: $z = 12 + m$, in II gesetzt, und y gesucht, gibt $y = 10 - 3n$ und $z = 12 + 2n$; y in I gesetzt, gibt $x = 9n + 18$, und u ist $= 3 - 8n$.

Für $n = 0$, folgt 18, 10, 12 und 3.
„ $n = -1$, „ 9, 13, 10 „ 11.
„ $n = -2$, „ 0, 16, 8 „ 19.

Die anderen Werthe sind negativ.

„ 14) Die Formen sind: $7x = 5y + 3 = 6z + 1 = 8u + 5$, bilde 3 Gleichungen wie in Nro. 13.

Man findet die Zahlform: $840n + 133$, und die Zahlen 133, 973, 1813, 2653 u. s. w.

„ 15) Bilde 3 Gleichungen, eliminire x und dann y; bestimme den Werth von z in u so, daß z eine ganze Zahl wird. Setze beide in eine der 2 letzten Gleichungen und bestimme die Form von y, und aus Gleichung II den Werth für x.

Man findet die Zahlen (für $n = 2$): 100, 20, 50 und 40.

Außer diesen gibt es keine mehr, welche den Bedingungen entsprechen.

„ 16) Verfahre wie in Nro. 15, so zeigt sich, daß die Aufgabe unmöglich ist; es gibt keine positiven Zahlen, welche den Bedinguügen genugen.

Anmerkung.

Man kann dies schon aus der Gleichung zwischen z und u erkennen, wenn man diese mit der Summe 900 vergleicht; da u, oder z größer als 900 sein müßte.

§. 7. Aufgaben über unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades, Seite 206.

Nro. 1) 1 und 324, 2 und 162, 3 und 108, 4 und 81, 6 und 54, 9 und 36, 12 und 27, oder 18 und 18.

„ 2) $y =$ der kleineren Zahl $= 1 + \frac{90}{x}$; die Zahlen sind: 90 und 2, 45 und 3, 30 und 4, 18 und 6, oder 15 und 7.

Nro. 3) $x = \frac{175 - y}{1 + y} = 175 - \frac{176\,y}{1 + y}$.

Es muß nun y um 1 kleiner sein als die Faktoren von 176. Man findet, da sich die Werthe wiederholen: 175 und 0, 87 und 1, 43 und 3, 21 und 7, 15 und 10.

" 4) $y = 1 + \frac{1}{x - 1}$; daher kann x nur $= 2$ sein, und $y = 2$.

" 5) Man erhält durch Division mit $x + y$ eine Gleichung vom ersten Grade, nämlich $x - y = 1$ und hieraus den Satz:

Wenn zwei Zahlen um 1 differiren, so ist die Differenz ihrer Quadrate gleich der Summe der zwei Zahlen.

(Es sei z. B. die eine $= x$, so ist die andere $= x - 1$, und:

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = x + x - 1,$$

daher die Differenz der Quadrate = der Summe der Zahlen.)

" 6) $y = a\frac{(x + a)}{x - a} = a + \frac{2a^2}{x - a}$.

Daher $x = 2a$, $y = 3a$, und $x = 3a$, $y = 2a$.

" 7) Die Nenner seien x und y, so ist: $y = \frac{21x}{19x - 105}$.

Man erhält die Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{1}{14}$.

" 8) $y = 2 + \frac{16}{x + 2}$, daher $x = 2$, 6 und 14; $y = 6$, 4 und 3, und $x = 0$, $y = 10$.

" 9) $x = 2\sqrt{(3y + 1)}$; daher muß $3y + 1$ eine Quadratzahl sein. Setzt man nun

$$3y + 1 = 1, = 4, = 9, = 16, = 25, = 36 \text{ u. s. w.}$$

so folgen für y die ganzen Zahlen 0, 1, 5, 8, u. s. w.
und für x " " " 2, 4, 8, 10, u. s. w.

" 10) Man erhält $36y^2 = 25x^2$.

Diese Gleichung kann auf eine unbestimmte vom ersten Grade gebracht werden, nämlich $y = \frac{5x}{6}$; wenn daher für x die Vielfachen von 6 genommen werden, so wird auch y eine ganze Zahl.

Man erhält $x = 6, 12, 18, 24, 30 \ldots\ldots$
$y = 5, 10, 15, 20, 25 \ldots\ldots$

Nro. 11) Theile durch x + y, so folgt: $x - y = 1 + \frac{60}{x + y}$.

x + y muß nun ein Faktor von 60 sein und man erhält:

für $x + y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.$

die Werthe: $x - y = 61, 31, 21, 16, 13, 11, 7, 6, 5, 4, 3, 2.$

Suche nun aus je zwei zusammengehörigen Werthen von x + y und x − y, die Größen x und y, so folgen die ganzen Werthe:

$x = \mathbf{31}, \mathbf{12}, \mathbf{10}, \mathbf{9}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{12}$ **und 31**; wozu

$y = \mathbf{-30}, \mathbf{-9}, \mathbf{-6}, \mathbf{-4}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{8}$ „ **29** ist.

Nro. 12) Siehe §. 6. Aufgabe 7.

Man findet die Seiten = **6** Fuß und 8 Fuß.

Verbesserungen,

welche vor dem Gebrauche des Buches vorzunehmen sind.

Seite 5, Aufgabe 8, setze 3p statt 3q.

„ 18, Zeile 9 v. u. vor z. B. setze: Wenn diese Zahlen unter sich relative Primzahlen sind.

„ 26, §. 2. Aufg. 5, 2te Zeile setze: $-5m^2$ statt $+5m^2$.

„ 31, Zeile 14 v. u. setze: b^3 statt b^2; und 7 v. u. c^{-5} statt a^{-5}; ferner c^{10} statt b^{10}, und Zeile 4 v. u. a^{-3} statt a^{-2}.

„ 43, *g*) Setze 1027 statt 927, (in der ganzen Aufgabe).

„ 46, Aufg. 12, 3tes Glied, setze $16a^4$ statt $4a^4$.

„ 48, unten. Setze im Resultat 1,92 statt 1,952, und für die 3 letzten Zeilen:

2804(20 : 1083
2188 88   1144
―――――   109444

u. s. w.

„ 51, §. 9. Aufgabe 4, setze -9 statt -1.

„ 64, Zeile 14 v. u. setze: Differenzen statt Quotienten.

„ 106, „ 4 v. u. „ 77,1 statt 771.

„ 117, „ 7 v. u. „ jedes 3ten statt des 3ten

„ 188, §. 9. Aufg. 7 „ Quadrat statt Cubik.

„ 222, Zeile 4 v. oben setze: $4\sqrt[4]{\frac{4(3-2\sqrt{2})}{3-\sqrt{7}}}$ statt $\sqrt[4]{\frac{4(3-\sqrt{2})}{3-\sqrt{7}}}$.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rummer, Friedrich

Die Buchstabenrechnung und Lehre von den Gleichungen mit e. Sammlung von Aufgaben ; d Buchstabenrechnung bis zur Lehre von d. niederen Reihen (einschließl.) u. d. Gleichungen vom ersten u. zweiten Grade enthaltend

Heidelberg 1847

Math.p. 489 k
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082697-0